2009 개정 교육과정
인천광역시교육감 인정
고교-04-106-04-13

고|등|학|교

수학 I



신항균
이광연
박세원
신범영
이계세
김정화
박문환
윤정호
박상의
서원호
전제동
이동흔

(주)지학사

교과서 물려주기 기록표

연도	교과서 사용자				상태
	학년	반	번호	이름	

※ 상태 표기 예시: 매우 좋음, 좋음, 보통, 나쁨

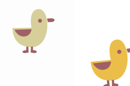
고 | 등 | 학 | 교

수학 I

(주)지학사

들어가는 말





수학은 오랜 옛날부터 문명의 발달에 핵심적인 역할을 해왔으며 앞으로도 이와 같은 수학의 역할은 더욱 확대될 것이다. 특히 현재의 지식 정보화 사회에서의 신기술은 수학의 뒷받침 없이는 얻어질 수 없다. 실제로 수학은 우주, 항공, 컴퓨터 과학과 같은 자연 과학은 물론이고 경제, 경영 등과 같은 인문 · 사회 과학에도 폭넓게 이용되고 있다. 또한 현대 문명을 합리적으로 운영하고 발전시켜 21세기를 살아가는 우리에게 창조적이고 논리적인 아이디어를 제공하는 기초가 되고 있다.

수학을 공부하는 목적은 단순히 수학의 기본 지식을 습득하는 데에서 벗어나 사물의 현상을 수학적으로 관찰하고 해석함으로써 실생활의 여러 가지 문제에 적극적으로 대처하고 합리적이고 논리적으로 해결하는 능력을 기르는 데 있다.

이런 목적을 달성하기 위하여 이 책은 전인적 성장의 기반 위에 개성의 발달과 진로를 개척하는 사람, 기초 능력의 바탕 위에 새로운 발상과 도전으로 창의성을 발휘하는 사람, 문화적 소양과 다원적 가치에 대한 이해를 바탕으로 품격 있는 삶을 영위하는 사람, 세계와 소통하는 시민으로서 배려와 나눔의 정신으로 공동체 발전에 참여하는 사람을 육성하려는 마음가짐으로 새롭게 개정된 교육과정에 맞게 만들었다.

특히 학생들이 생활 주변에서 일어나는 여러 가지 현상을 수학적으로 생각하고, 주어진 문제를 창의적이고 합리적으로 해결하는 능력을 기를 수 있도록 하기 위하여 다음과 같은 사항에 중점을 두고 엮었다.

첫째, 수학적 개념과 원리를 이해하고 기초 계산을 숙달하게 할 뿐만 아니라 학생의 추론 능력, 문제 해결 능력 그리고 의사소통 능력을 발달시킬 수 있도록 하였다.

둘째, 생각 열기를 통하여 자신을 둘러싼 세계에 대한 경험을 토대로 다양한 문화와 가치에 대한 이해를 넓히고, 탐구 활동을 통하여 스스로 수학을 체험하게 함으로써 학생들이 자연스럽게 수학적 내용을 이해할 수 있도록 하였다.

셋째, 심신의 건강하고 조화로운 발달을 추구하며, 다양한 분야의 경험과 지식을 익혀 적극적으로 진로를 탐색할 수 있도록 하였으며, 흥미와 더불어 수학의 아름다움을 발견하고 수학의 유용성을 느낄 수 있도록 하였다.

본래 수학은 암기만으로는 좋은 학습 성과를 거둘 수 없고, 학생 스스로가 문제를 해결하고자 노력할 때 비로소 원리나 법칙 등이 심도 있게 이해되고 학습에 흥미도 느끼게 되는 과목이다. 이 책이 스스로 문제를 해결하려는 학생들에게 좋은 길잡이가 되기를 기대한다. 또 이 책으로 수학 실력을 키워 오늘날의 정보화와 세계화 시대에 걸맞은 창조적이고 지혜로운 사람으로 성장하기 바란다.



지은이 씀

이 책의 짜임새

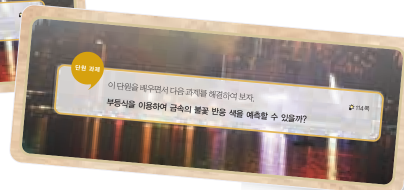
대단원 도입



단원과 관련된 사진을 제시하고 관련 내용을 소개함으로써 단원 학습의 흥미와 관심을 높였다. 또 앞서 배운 내용과 단원의 연계성 확인을 위한 문제를 제시하였다.

중단원 도입





새로운 학습을 시작하면서 다른 교과나 실생활과 관련된 내용을 스토리텔링 형식으로 소개하고 수학적 사고를 유발하는 물음을 제시하여 학습 동기를 유발하도록 하였다.



본문 전개

생각 열기 / 탐구 활동

본격적인 학습에 앞서 스토리텔링으로 흥미를 이끌어 내고, 새로 도입할 수학 원리의 탐구를 통해 학습 내용의 실마리를 제공하였다.

예제 / 문제

대표적인 유형의 문제로 개념 이해를 탄탄히 하고, 유사 문제를 해결할 수 있도록 하였다.

창의 UP / 사고력 기르기 / 단원 과제

수학의 개념을 깊이 생각하고 표현함으로써 창의력을 높이며, 추론, 의사소통, 문제 해결의 세 유형으로 사고력을 기르고, 중단원 도입과 관련한 구체적인 문제를 통해 생활에 적용되는 수학을 직접 느낄 수 있도록 하였다.



중단원 마무리

학생의 학습 수준에 맞추어 문제를 선택하여 풀게 함으로써 수준별 학습이 가능하도록 하였고, 문제와 관련된 소단원명과 학습 요소를 제시하여 본문과의 연계성을 살리고 학생 스스로 부족한 부분을 찾아 보충할 수 있도록 하였다.



대단원 마무리

대단원 학습을 마친 후 다양한 주제에 대한 탐구로 종합적인 문제 해결력을 신장하도록 하였고, 단원에서 배운 내용을 요약·정리하여 학습 내용을 상기할 수 있도록 하였으며, 대단원 학습 내용을 총망라한 다양한 평가 문제를 제시하였다.

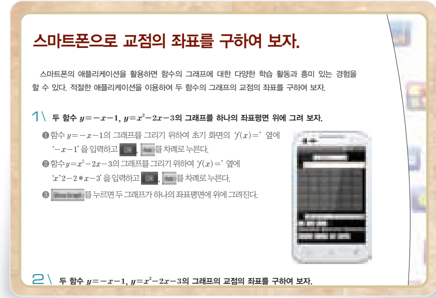


수학 플러스

교육부에서 발표한 수학 교육 선진화 방안에서 강조하는 STEAM과 관련하여 수학과 과학, 기술, 공학, 예술, 문학, 실생활, 역사 이야기 등을 소개함으로써 단원의 학습에 대한 폭넓은 이해와 확장이 가능하도록 하였다.


수학 + 과학

황도 좌표와 24절기

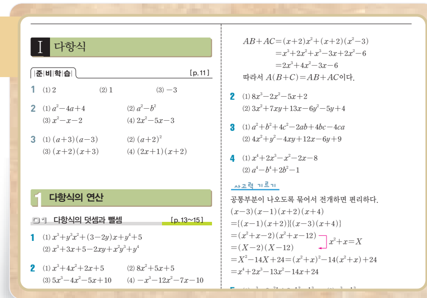

스마트폰으로 교점의 좌표를 구하여 보자.

1 두 함수 $y=-x-1$, $y=x^2-2x-3$의 그래프를 하나의 좌표평면 위에 그려 보자.

2 두 함수 $y=-x-1$, $y=x^2-2x-3$의 그래프의 교점의 좌표를 구하여 보자.

부록

교과서의 문제에 대한 해답과 본문에 등장한 수학 용어와 기호를 찾아보기로 제공하여 학습에 도움이 되도록 하였다.


I 다항식

1 다항식의 연산


찾아보기

용어

기호

교과서 속 아이콘 활용

중③ 선수 학습 내용

 계산기 활용 문제



실생활 문제



발전 문제

보기 구체적인 예시

주의 주의할 점

참고 참고할 사항



차례

I 다항식

II 방정식과 부등식

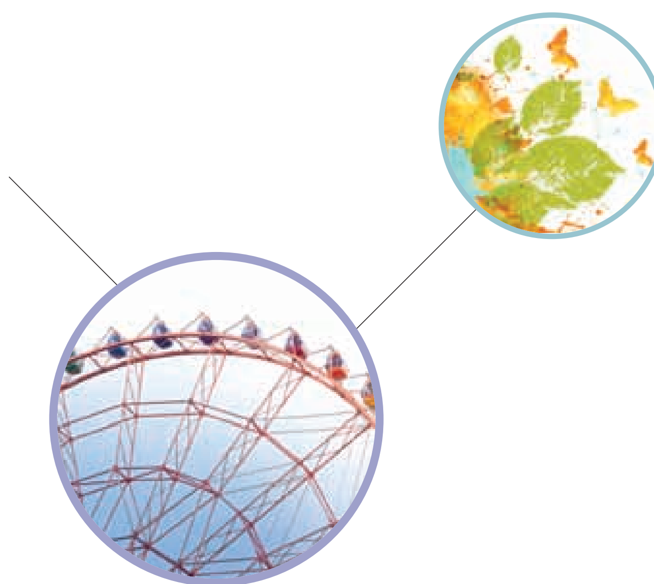






III 도형의 방정식

* 부록





수학은 자연 현상을 설명하는 도구로서
대부분 다항식의 형태로 표현된다.

다항식

I

| 준 | 비 | 학 | 습 |

중 ① 문자와 식

1 다항식 x^2-3x+1에 대하여 다음을 구하여라.

(1) 차수

(2) 상수항

(3) x의 계수

중 ② 곱셈 공식

2 다음 식을 전개하여라.

(1) $(a-2)^2$ (2) $(a+b)(a-b)$

(3) $(x-2)(x+1)$ (4) $(2x+1)(x-3)$

중 ③ 인수분해 공식

3 다음 식을 인수분해하여라.

(1) a^2-9 (2) a^2+4a+4

(3) x^2+5x+6 (4) $2x^2+5x+2$

1

다항식의 연산

문자의 사용과 수학의 발전

우리가 사는 세상은 수학으로 표현할 수 있는데, 특히 다항식은 수학이라는 언어를 이루는 단어라고 할 수 있다.

다항식의 미지수와 상수를 알파벳으로 나타내기 시작한 사람은 프랑스의 수학자 비에타(Viéta, F.; 1540~1603)이고, 지금처럼 a, b, c를 상수로, x, y, z를 미지수로 처음 사용한 사람은 프랑스의 수학자 데카르트(Descartes, R.; 1596~1650)이다. 문자와 기호를 사용하여 수를 나타낸 것은 인류가 수를 사용하기 시작한 때로부터 오랜 시간이 흐른 뒤였다.



단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 15쪽

실생활 문제를 다항식으로 어떻게 표현할 수 있을까?

01 다항식의 덧셈과 뺄셈

● 다항식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다.

다항식의 덧셈과 뺄셈은 어떻게 하는가?

생각 열기

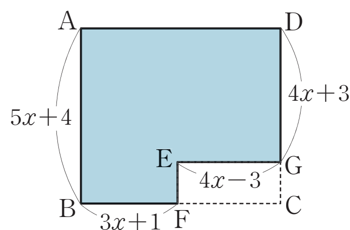
퀼트

퀼트는 천과 천 사이에 솜 또는 모사 등을 넣고 바느질을 하여 무늬를 두드러지게 하는 기법이다. 이러한 기법은 이불, 쿠션, 겨울용 의복 등의 생활용품뿐만 아니라 예술 작품에도 활용된다.



탐구 활동

오른쪽 그림과 같이 직사각형 모양의 천 ABCD에서 직사각형 EFCG를 잘라 내었다. 다음 물음에 답하여 보자.



1. 선분 AD의 길이를 x에 대한 식으로 나타내어 보자.
2. 선분 EF의 길이를 x에 대한 식으로 나타내어 보자.
3. 1, 2를 이용하여 직사각형 ABCD와 직사각형 EFCG의 둘레의 길이를 각각 x에 대한 식으로 나타내어 보자.

● 다항식은 보통 내림차순으로 정리한다.

다항식을 정리할 때, 한 문자에 대하여 차수가 높은 항부터 차례로 쓰는 것을 내림차순으로 정리한다고 하며, 차수가 낮은 항부터 차례로 쓰는 것을 오름차순으로 정리한다고 한다.

보기 다항식 x^2+x^3+5-x를 x에 대하여

(i) 내림차순으로 정리하면 x^3+x^2-x+5

(ii) 오름차순으로 정리하면 $5-x+x^2+x^3$

문제 1 다항식 $y^4+x^3+x^2y^3+3x-2xy+5$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) x에 대하여 내림차순으로 정리하여라.

(2) y에 대하여 오름차순으로 정리하여라.

중① 문자와 그 문자에 대한 차수가 같은 항을 동류항이라고 한다.

다항식의 뺄셈
$A-B=A+(-B)$

이제 다항식의 덧셈과 뺄셈에 대하여 알아보자.

두 다항식 A, B에 대하여 덧셈 $A+B$는 A와 B의 각 항을 동류항끼리 모아서 정리한 것이다.

또 두 다항식의 뺄셈 $A-B$는 B의 각 항의 부호를 바꾸어 A와 더한 것이다.

예제 01

두 다항식 $A=x^2-2xy+3y^2$, $B=3x^2+xy-4y^2$에 대하여 다음을 계산하여라.

(1) $A+B$ (2) $A-B$

풀이 (1) $A+B=(x^2-2xy+3y^2)+(3x^2+xy-4y^2)$

$=(1+3)x^2+(-2+1)xy+(3-4)y^2$

$=4x^2-xy-y^2$

(2) $A-B=(x^2-2xy+3y^2)-(3x^2+xy-4y^2)$

$=(x^2-2xy+3y^2)+(-3x^2-xy+4y^2)$

$=(1-3)x^2+(-2-1)xy+(3+4)y^2$

$=-2x^2-3xy+7y^2$

답 (1) $4x^2-xy-y^2$ (2) $-2x^2-3xy+7y^2$

다른 풀이 다음과 같이 동류항끼리 세로로 맞추어 계산할 수도 있다.

$$\begin{array}{rr} & x^2-2xy+3y^2 \\ +) & 3x^2+xy-4y^2 \\ \hline & 4x^2-xy-y^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & x^2-2xy+3y^2 \\ -) & 3x^2+xy-4y^2 \\ \hline & -2x^2-3xy+7y^2 \end{array}$$

문제 2

두 다항식 $A=2x^3-x+5$, $B=-x^3+4x^2+3x$에 대하여 다음을 계산하여라.

(1) $A+B$ (2) $A+2B$

(3) $2A-B$ (4) $-2A-3B$

다항식 A와 실수 k에 대하여 kA는 A의 각 항에 실수 k를 곱한 것이다.

일반적으로 다항식의 덧셈에 대하여 다음이 성립한다.

다항식의 덧셈에 대한 성질

세 다항식 A, B, C에 대하여

(1) $A+B=B+A$ [교환법칙]

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$ [결합법칙]

다항식에서는 덧셈에 대한 결합법칙이 성립하므로 $(A+B)+C$와 $A+(B+C)$는 $A+B+C$와 같이 괄호를 사용하지 않고 나타낼 수 있다.

예제 02 세 다항식 $A=3x^2+xy$, $B=x^2-2xy+5y^2$, $C=2xy+y^2$에 대하여 다음이 성립함을 보여라.

(1) $A+B=B+A$　　　(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$

풀이 (1) $A+B=(3x^2+xy)+(x^2-2xy+5y^2)$

$=(3+1)x^2+(1-2)xy+5y^2=4x^2-xy+5y^2$

$B+A=(x^2-2xy+5y^2)+(3x^2+xy)$

$=(1+3)x^2+(-2+1)xy+5y^2=4x^2-xy+5y^2$

따라서 $A+B=B+A$이다.

(2) $(A+B)+C=(4x^2-xy+5y^2)+(2xy+y^2)$

$=4x^2+(-1+2)xy+(5+1)y^2=4x^2+xy+6y^2$

$B+C=(x^2-2xy+5y^2)+(2xy+y^2)$

$=x^2+(-2+2)xy+(5+1)y^2=x^2+6y^2$

$A+(B+C)=(3x^2+xy)+(x^2+6y^2)$

$=(3+1)x^2+xy+6y^2=4x^2+xy+6y^2$

따라서 $(A+B)+C=A+(B+C)$이다.

문제 3 세 다항식 $A=x^2y-2xy^2+y^3$, $B=x^3-2x^2y-y^3$, $C=x^3+y^3$에 대하여 다음을 계산하여라.

(1) $3(A+B)-A$　　　(2) $(2A+B)+(C-A)$

발전

문제 4 두 다항식 $A=3x^3+2xy-y^2$, $B=x^3+x^2-2xy-5y^2$에 대하여 $A+B+C=x^2-y^2$을 만족시키는 다항식 C를 구하여라.

단원 과제



앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

지면에서 수직 방향으로 초속 v_0 m로 던진 물체의 t초 후의 높이 h m는

$$h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2\ (g\text{는 중력가속도})$$

과 같이 t에 대한 다항식으로 표현된다. 초속 20 m로 물체 A를 던지고 2초 후에 같은 속도로 물체 B를 던졌을 때, 다음 물음에 답하여라. (단, $g=10$으로 계산한다.)

(1) 물체 A를 던지고 x초 후의 두 물체 A, B의 높이를 각각 x에 대한 다항식으로 나타내어라. (단, $x\geq 2$)

(2) 물체 A를 던지고 x초 후의 (물체 A의 높이)−(물체 B의 높이)를 x에 대한 다항식으로 나타내어라. (단, $x\geq 2$)

02 다항식의 곱셈

● 다항식의 곱셈을 할 수 있다.

다항식의 곱셈은 어떻게 하는가?

생각 열기

종이 공예

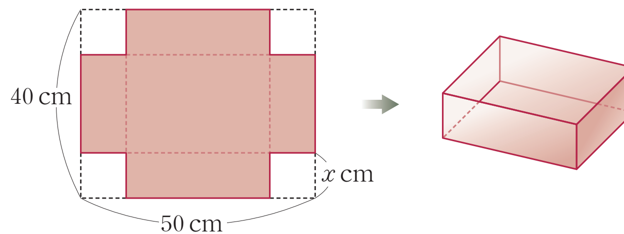
종이를 오리거나 접어서 여러 모양을 만드는 수공예를 종이 공예라고 한다. 종이 공예는 상업용 그릇, 백화점의 진열장 장식, 실내 장식, 무대 미술 등 여러 분야에서 그 미적 · 경제적 가치가 높아지고 있다.



탐구 활동

가로의 길이가 50 cm, 세로의 길이가 40 cm인 직사각형 모양의 종이가 있다. 다음 그림과 같이 네 귀퉁이를 한 변의 길이가 x cm인 정사각형 모양으로 잘라 내어 뚜껑이 없는 상자를 만들려고 한다. 물음에 답하여 보자.





1. 만들어진 상자의 밑면의 넓이를 x에 대한 식으로 나타내어 보자.

2. 만들어진 상자의 부피를 x에 대한 식으로 나타내어 보자.

탐구 활동에서 만들어진 상자의 밑면의 넓이와 부피는 각각

$$(50-2x)(40-2x)\ \text{cm}^2,\ (50-2x)(40-2x)x\ \text{cm}^3$$

이다.

이와 같은 다항식의 곱셈을 전개하는 방법에 대하여 알아보자.

두 다항식 A, B에 대하여 곱셈 AB는 지수법칙과 분배법칙을 이용하여 전개한 다음 동류항끼리 정리한 것임을 중학교에서 배웠다.

중② **지수법칙**
m, n이 자연수일 때
(i) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
(ii) $(a^m)^n = a^{mn}$
(iii) $(ab)^m = a^m b^m$

일반적으로 다항식의 곱셈에 대하여 다음이 성립한다.

다항식의 곱셈에 대한 성질

세 다항식 A, B, C에 대하여

(1) $AB=BA$ [교환법칙]

(2) $(AB)C=A(BC)$ [결합법칙]

(3) $A(B+C)=AB+AC$
$(A+B)C=AC+BC$ [분배법칙]

다항식에서는 곱셈에 대한 결합법칙이 성립하므로 $(AB)C$와 $A(BC)$는 ABC와 같이 괄호를 사용하지 않고 나타낼 수 있다.

예제 01 세 다항식 $A=x+y$, $B=x-2y$, $C=3y$에 대하여 다음이 성립함을 보여라.

(1) $AB=BA$ (2) $(AB)C=A(BC)$

문자와 문자, 문자와 수, 수와 수 사이의 '·'은 곱을 의미한다.
예 $x\cdot x=x\times x$

풀이 (1) $AB=(x+y)(x-2y)=x\cdot x+x\cdot(-2y)+y\cdot x+y\cdot(-2y)$
$=x^2-2xy+xy-2y^2=x^2-xy-2y^2$
$BA=(x-2y)(x+y)=x\cdot x+x\cdot y-2y\cdot x-2y\cdot y$
$=x^2+xy-2xy-2y^2=x^2-xy-2y^2$
따라서 $AB=BA$이다.

(2) $(AB)C=(x^2-xy-2y^2)\cdot 3y=x^2\cdot 3y-xy\cdot 3y-2y^2\cdot 3y=3x^2y-3xy^2-6y^3$
$BC=(x-2y)\cdot 3y=x\cdot 3y-2y\cdot 3y=3xy-6y^2$
$A(BC)=(x+y)(3xy-6y^2)=x\cdot 3xy+x\cdot(-6y^2)+y\cdot 3xy+y\cdot(-6y^2)$
$=3x^2y-6xy^2+3xy^2-6y^3=3x^2y-3xy^2-6y^3$
따라서 $(AB)C=A(BC)$이다.

문제 1 세 다항식 $A=x+2$, $B=x^2$, $C=x^2-3$에 대하여 $A(B+C)=AB+AC$가 성립함을 보여라.

문제 2 다음 식을 전개하여라.

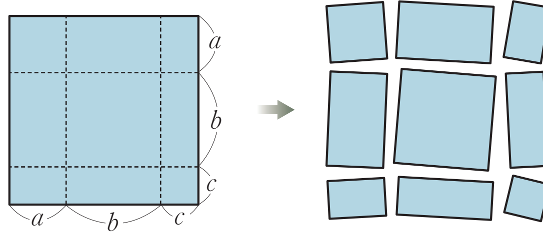
(1) $(2x-1)(4x^2+x-2)$ (2) $(x+3y+4)(3x-2y+1)$

$(A+B)(C+D+E)$

복잡한 다항식의 곱셈은 어떻게 하는가?

탐구 활동 다음 그림과 같이 정사각형 모양의 색종이를 9개의 작은 직사각형으로 잘랐다. 물음에 답하여 보자.





1. 처음 색종이의 넓이를 식으로 나타내어 보자.

2. 9개의 작은 직사각형의 넓이의 합을 식으로 나타내어 보자.

3. **1**과 **2**의 결과를 등식으로 나타내어 보자.

다항식의 곱셈은 분배법칙을 이용하여 전개할 수도 있지만 중학교에서 배운 다음과 같은 곱셈 공식을 이용하여 전개하면 더욱 편리하게 계산할 수 있다.

곱셈 공식 [1]

(1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

(2) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

(3) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

(4) $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

예제 02 $(a+b+c)^2$을 전개하여라.

풀이 $(a+b+c)^2=\{(a+b)+c\}^2$

$=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$

$=(a^2+2ab+b^2)+(2ac+2bc)+c^2$

$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

답 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

문제 3 다음 식을 전개하여라.

(1) $(a-b-2c)^2$ (2) $(2x-y+3)^2$

예제 03

다음 식을 전개하여라.

(1) $(x+y+3)(x+y-2)$ (2) $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

풀이 (1) $x+y=X$로 놓으면

$$\begin{aligned}(x+y+3)(x+y-2)&=(X+3)(X-2)\\&=X^2+X-6\\&=(x+y)^2+(x+y)-6\\&=x^2+2xy+y^2+x+y-6\end{aligned}$$

(2) $a^2+b^2=X$로 놓으면

$$\begin{aligned}(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)&=(X+ab)(X-ab)\\&=X^2-(ab)^2\\&=(a^2+b^2)^2-(ab)^2\\&=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2\\&=a^4+a^2b^2+b^4\end{aligned}$$



답 (1) $x^2+2xy+y^2+x+y-6$ (2) $a^4+a^2b^2+b^4$

문제 4 다음 식을 전개하여라.

(1) $(x^2+x+2)(x^2+x-4)$ (2) $(a^2-b^2+1)(a^2+b^2-1)$

사고력 기르기

추론
▶ 의사소통
문제 해결

다항식 $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)$를 각자 다양한 방법으로 전개하여 그 과정을 친구들과 비교하고, 효과적으로 전개하는 방법에 대해 토의하여 보자.

이제 좀 더 복잡한 모양의 곱셈 공식을 유도하여 보자.

예제 04 다음 식을 전개하여라.

(1) $(a+b)^3$ (2) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$

풀이 (1) $(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2$

$=(a+b)(a^2+2ab+b^2)$

$=a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)$

$=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

(2) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)$

$=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3$

$=a^3+b^3$

답 (1) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ (2) a^3+b^3

문제 5 다음 식을 전개하여라.

(1) $(a-b)^3$ (2) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$

이상을 정리하면 다음과 같다.

곱셈 공식 [2]

(1) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(2) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

문제 6 다음 식을 전개하여라.

(1) $(x+3y)^3$ (2) $(2a-3b)^3$

(3) $(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)$ (4) $(x-2)(x^2+2x+4)$

곱셈 공식을 이용하면 여러 가지 식의 값을 쉽게 구할 수 있다.

예제 05 $x^2+y^2=5$, $x+y=3$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) xy (2) x^3+y^3



풀이 (1) $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$에서 $2xy=(x+y)^2-(x^2+y^2)$이므로

$$xy=\frac{1}{2}\{(x+y)^2-(x^2+y^2)\}$$
$$=\frac{1}{2}(3^2-5)$$
$$=2$$

(2) $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$에서

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3x^2y-3xy^2$$
$$=(x+y)^3-3xy(x+y)$$
$$=3^3-3\times2\times3$$
$$=9$$

답 (1) 2 (2) 9

문제 7 $x-y=-5$, $xy=3$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) x^2+y^2 (2) x^3-y^3

문제 8 $x^2+y^2=5$, $x-y=3$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $(x+y)^2$ (2) x^3-y^3

창의 up

$9\times111=(10-1)(10^2+10+1)=10^3-1$과 같이 101×9901을 10의 거듭제곱끼리의 연산으로 나타내고 곱셈 공식을 이용하여 그 값을 구하는 방법을 설명하여라.

03

다항식의 나눗셈

● 다항식의 나눗셈을 할 수 있다.

다항식의 나눗셈은 어떻게 하는가?

생각 열기

수학의 모태, 나일 강



나일 강의 범람이 없었다면 이집트 문명은 발생하지 않았을 것이라는 말이 있다. 나일 강은 매년 주기적으로 범람하였는데, 범람이 끝난 후 농지를 원래대로 복구하기 위하여 고대 이집트 문명에서는 측량술과 기하학이 특히 발달하였다.

탐구 활동

나일 강 주변에 다음 그림과 같은 직사각형 모양의 밭이 있다고 할 때, 물음에 답하여 보자.



1. 밭의 세로의 길이가 4, 넓이가 124라고 할 때, 밭의 가로의 길이를 구하여 보자.
2. 밭의 세로의 길이가 $x-1$, 넓이가 x^3-1이라고 할 때, 밭의 가로의 길이를 구하는 식을 세워 보자.

탐구 활동에서 밭의 세로의 길이와 그 넓이가 주어지면 가로의 길이를 구할 수 있다. 즉, 밭의 세로의 길이가 $x-1$, 넓이가 x^3-1일 때 밭의 가로의 길이는

$$(x^3-1)\div(x-1)$$

이다.

이제 이와 같은 다항식의 나눗셈을 하는 방법에 대하여 알아보자.

다항식을 다항식으로 나눌 때에는 두 다항식을 내림차순으로 정리한 후 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 계산하여 몫과 나머지를 구할 수 있다.

예를 들어 다항식 $3x^2+7x+5$를 다항식 $x+2$로 나누면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l} & 3x+1 \leftarrow \text{몫} \\ 12 & 375 \\ & 36 \leftarrow 12\times 3 \\ & 15 \\ & 12 \leftarrow 12\times 1 \\ & 3 \leftarrow \text{나머지} \end{array}$$

$$\begin{array}{rll} & 3x+1 & \leftarrow \text{몫} \\ x+2 \,\big) & 3x^2+7x+5 & \\ & 3x^2+6x & \leftarrow (x+2)\times 3x \\ \hline & x+5 & \\ & x+2 & \leftarrow (x+2)\times 1 \\ \hline & 3 & \leftarrow \text{나머지} \end{array}$$

따라서 몫은 $3x+1$, 나머지는 3이므로

$$3x^2+7x+5=(x+2)(3x+1)+3$$

과 같이 나타낼 수 있다.

일반적으로 다항식의 나눗셈에 대하여 다음이 성립한다.

자연수 a를 자연수 b로 나눌 때의 몫을 q, 나머지를 r라고 하면 $a=bq+r$ (단, $0\le r<b$)

다항식의 나눗셈

다항식 A를 다항식 B $(B\neq 0)$로 나눌 때의 몫을 Q, 나머지를 R라고 하면

$$A=BQ+R \ \text{(단, } (R\text{의 차수})<(B\text{의 차수})\text{)}$$

특히 $R=0$이면 $A=BQ$이고 A는 B로 나누어떨어진다고 한다.

예제 01

다항식 $A=3x^3+7x^2+1$을 다항식 $B=x^2+3x-1$로 나눈 몫 Q와 나머지 R를 구하고, 그 결과를 이용하여 $A=BQ+R$의 꼴로 나타내어라.

풀이

$$\begin{array}{rl} & 3x-2 \\ x^2+3x-1 \,\big) & 3x^3+7x^2 \qquad +1 \\ & 3x^3+9x^2-3x \\ \hline & -2x^2+3x+1 \\ & -2x^2-6x+2 \\ \hline & 9x-1 \end{array}$$

따라서 몫 Q는 $Q=3x-2$, 나머지 R는 $R=9x-1$이므로

$$3x^3+7x^2+1=(x^2+3x-1)(3x-2)+9x-1$$

답 $Q=3x-2$, $R=9x-1$, $3x^3+7x^2+1=(x^2+3x-1)(3x-2)+9x-1$

문제 1 다음 나눗셈의 몫 Q와 나머지 R를 구하고, 그 결과를 이용하여 $A=BQ+R$의 꼴로 나타내어라.

(1) $(x^3+x^2-2x+3)\div(x-1)$

(2) $(x^3-2x+1)\div(x^2+x+1)$

문제 2 다항식 A를 다항식 $x+2$로 나눈 몫이 $2x+1$, 나머지가 2일 때, 다항식 A를 구하여라.



문제 3 다항식 x^3+3x^2+a를 다항식 x^2+x+b로 나눈 나머지가 $-x+1$일 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

두 다항식 $2x^3+x^2-1$과 x^2-1에 대하여 다음이 성립한다.

$$2x^3+x^2-1=(x^2-1)\cdot 2x+x^2+2x-1$$

이때 $2x^3+x^2-1$을 x^2-1로 나눈 나머지가 x^2+2x-1이 될 수 없는 이유를 설명하여 보자.

[해답 p.213]

중단원 기초

수준별 학습

1 다항식 $2y^2+x^2y-y+3x^3-1$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) x에 대한 내림차순으로 정리하여라.

(2) y에 대한 오름차순으로 정리하여라.

01 다항식의 덧셈과 뺄셈
다항식의 정리

2 다음 식을 계산하여라.

(1) $(-x^2+3x+2)+(x^3-4x+3)$

(2) $(x^3-2x^2+2)-(-4x^3+x^2-2)$

(3) $(2x-1)(x^2+3x-1)$

(4) $x(x+1)(x^2-2)$

01 다항식의 덧셈과 뺄셈
02 다항식의 곱셈

3 다음 식을 전개하여라.

(1) $(2x+3y)^3$

(2) $(x-2y)^3$

(3) $(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)$

(4) $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)$

02 다항식의 곱셈
곱셈 공식

4 곱셈 공식을 이용하여 다음을 구하여라.

(1) $x+y=2$, $x^2-y^2=6$일 때, $x-y$의 값

(2) $a-b=3$, $ab=2$일 때, a^3-b^3의 값

02 다항식의 곱셈
곱셈 공식

5 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하여라.

(1) $(x^2+2x+3)\div(x-1)$

(2) $(x^3-x^2+2x-3)\div(x+1)$

03 다항식의 나눗셈

[해답 p.213]

중단원 기본

1 다음 표의 가로, 세로의 합이 모두 $3x^2-6x+9$가 되도록 빈칸에 알맞은 다항식을 써넣어라.

01 다항식의 덧셈과 뺄셈

		$3x^3+4x^2+x+6$
$4x^3+5x^2+2x+7$	x^2-2x+3	
	$2x^3+3x^2+5$	

2 다음 식을 전개하여라.

02 다항식의 곱셈
복잡한 다항식의 곱셈

(1) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

(2) $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$

(3) $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

3 $x-y=1$, $xy=3$일 때, $\frac{x^2}{y}-\frac{y^2}{x}$의 값을 구하여라.

02 다항식의 곱셈
곱셈 공식

4 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하여라.

03 다항식의 나눗셈

(1) $(2x^3-3x+1)\div(x^2+2)$

(2) $(2x^3-9x^2+17x-3)\div(x^2-3x+2)$

5 다항식 A를 다항식 x^2-3x-2로 나눈 몫이 $x+2$, 나머지가 $9x+3$일 때, 다항식 A를 구하여라.

03 다항식의 나눗셈

[해답 p.213]

중단원 실력

수준별 학습

1 두 다항식 $A=x^2-xy-2y^2$, $B=2x^2+xy-y^2$에 대하여 $A-2(X-B)=3A$를 만족시키는 다항식 X를 구하여라.

01 다항식의 덧셈과 뺄셈

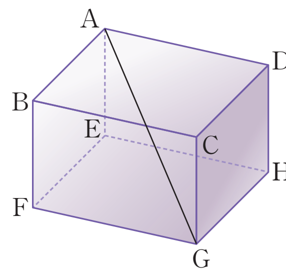
2 두 다항식 $(x^2+x+1)^3$, $(x^3+x^2+x+1)^3$을 전개한 식에서 x^2의 계수는 서로 같다. 그 이유를 설명하여라.

02 다항식의 곱셈
복잡한 다항식의 곱셈

3 두 양수 a, b에 대하여 $a^2+ab+b^2=7$, $a^2-ab+b^2=3$일 때, a^3+b^3의 값을 구하여라.

02 다항식의 곱셈
곱셈 공식

4 오른쪽 그림과 같은 직육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자의 겉넓이는 24 cm^2이고, 모든 모서리의 길이의 합은 28 cm일 때, 상자의 대각선 AG의 길이를 구하여라.



02 다항식의 곱셈
곱셈 공식의 활용

5 다항식 $A=x^3-2x^2+ax+b$가 다항식 x^2+x+1로 나누어떨어질 때, 다항식 A를 x^2-2로 나눈 몫과 나머지를 구하여라.

03 다항식의 나눗셈

2 나머지정리

등호 =의 의미





단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 38쪽

등식을 이용하여 복잡한 나눗셈의 나머지를 구할 수 있을까?

01 항등식

● 항등식의 의미를 이해한다.

항등식을 이용하여 미지의 계수를 어떻게 구하는가?

생각 열기

달력 속의 수학



현재 우리가 사용하는 달력은 1582년 교황 그레고리우스 13세(Gregorius XIII ; 1502～1585)가 제정한 그레고리력으로, 이 달력에서 1년은 365.2425일이며 52.1775주이다. 달력에서는 다양하고 재미있는 수학적 규칙을 발견할 수 있는데, 이 규칙들은 1주일이 7일이라는 점과 밀접한 관련이 있다.

탐구 활동

오른쪽 그림은 어느 해 3월의 달력이다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 18일을 기준으로 상하, 좌우, 대각선으로 이웃한 수들의 합을 각각 구하고, 그 값을 비교하여 보자.

2. x일을 기준으로 상하, 좌우, 대각선으로 이웃한 수들을 x를 사용하여 나타내어 보자.

3월 MARCH

일	월	화	수	목	금	토
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

탐구 활동에서 달력의 x일에 대하여 상하로 이웃한 수의 합 $(x-7)+(x+7)$과 좌우로 이웃한 수의 합 $(x-1)+(x+1)$은 항상 같다. 즉, 등식

$$(x-7)+(x+7)=(x-1)+(x+1)$$

은 x에 어떤 값을 대입하여도 성립하므로 항등식이다.

중 ① 주어진 식의 문자에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립하는 등식을 그 문자에 대한 항등식이라고 한다.

보기 등식 $(x+1)(x^2-x+1)=x^3+1$은 x에 대한 항등식이지만 등식 $x^2+1=2x$는 $x=1$일 때에만 성립하므로 항등식이 아니다.

문제 1 다음 등식 중에서 x에 대한 항등식을 모두 찾아라.

㉠ $x^2-9=(x+3)(x-3)$	㉡ $x^2-2x=(x-1)^2-1$
㉢ $x(2x+1)=x^2+2x-6$	㉣ $(x+1)^2-(x-1)^2=4x$

예제 01 등식 $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이 될 조건은 $a=b=c=0$임을 보여라.

풀이 $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면 x에 어떤 값을 대입하여도 등식이 항상 성립한다.

$x=0$을 대입하면 $c=0$ ...... ①

$x=1$을 대입하면 $a+b+c=0$ ...... ②

$x=-1$을 대입하면 $a-b+c=0$ ...... ③

①, ②, ③에서 $a=0$, $b=0$, $c=0$

또 $a=b=c=0$이면 등식 $ax^2+bx+c=0$은 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로 x에 대한 항등식이다.

따라서 등식 $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이 될 조건은 $a=b=c=0$이다.

문제 2 등식 $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이 될 조건은 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$임을 보여라.

이상에서 다음을 알 수 있다.

항등식의 성질

(1) $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면 $a=0$, $b=0$, $c=0$이다.
또 $a=0$, $b=0$, $c=0$이면 $ax^2+bx+c=0$은 x에 대한 항등식이다.

(2) $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이면 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$이다.
또 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$이면 $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$은 x에 대한 항등식이다.

한편 항등식의 성질을 이용하여 등식에서 미지의 계수를 정하는 방법을 **미정계수법**이라고 한다.

미정계수법에는 좌변과 우변의 동류항의 계수를 비교하여 미지의 계수를 정하는 방법과 문자에 특정한 수를 대입하여 미지의 계수를 정하는 방법이 있다.

양변의 계수를 비교하여 계수를 정하는 방법을 계수비교법, 문자에 특정한 수를 대입하여 계수를 정하는 방법을 수치대입법이라고 한다.

예제 02 다음 등식이 x에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b의 값을 구하여라.

(1) $x^2-a(x-2)=x^2+3x+b$

(2) $(x-1)^2=(x-2)^2+a(x-2)+b$

풀이 (1) 주어진 등식의 좌변을 전개하면

$$x^2-ax+2a=x^2+3x+b$$

양변의 계수를 비교하면 $-a=3$, $2a=b$

따라서 $a=-3$, $b=-6$이다.

(2) 양변에 $x=2$를 대입하면 $1=b$ …… ①

양변에 $x=1$을 대입하면 $0=1-a+b$ …… ②

①, ②에서 $a=2$, $b=1$

답 (1) $a=-3$, $b=-6$ (2) $a=2$, $b=1$

다른 풀이 (1) 양변에 $x=2$를 대입하면 $4=4+6+b$에서 $b=-6$ …… ①

양변에 $x=0$을 대입하면 $2a=b$ …… ②

①, ②에서 $a=-3$, $b=-6$

(2) 주어진 등식의 양변을 각각 전개하여 정리하면

$$x^2-2x+1=x^2+(a-4)x-2a+b+4$$

양변의 계수를 비교하면 $-2=a-4$, $1=-2a+b+4$

따라서 $a=2$, $b=1$이다.

문제 3 다음 등식이 x에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b, c의 값을 각각 구하여라.

(1) $x^2+(a-1)x-1=bx^2+c$

(2) $(x-2)(3x+1)=ax^2+bx+c$

(3) $a(x-1)^2+b(x-1)+c=2x^2-4x+7$

발전

문제 4 다항식 $2x^3+ax^2+bx+5$를 다항식 x^2-x+1로 나눈 몫이 $2x+5$이고 나머지가 $3x$일 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

실생활

문제 5 어느 날 소민 서점은 x권이 한 묶음인 소설책 다섯 묶음을 팔았고, 서현 서점은 $(x+2)$권이 한 묶음인 만화책 a묶음과 $(x-3)$권이 한 묶음인 요리책 b묶음을 팔았다. 두 서점에서 그날 각각 판매한 책의 권수가 같을 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.



사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

다음 그림을 보고 자신의 생일을 이용하여 같은 방법으로 계산하고, 생일을 알아맞히는 원리를 식으로 나타내어 보자.



02 나머지정리

● 나머지정리의 의미를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

나머지정리란 무엇인가?

생각 열기

배수 판정법

어떤 수를 직접 나누어 보지 않고도 그 수가 어떤 수의 배수인지를 판별할 수 있는 방법이 있다. 이를테면 홀수 번째 자리 숫자의 합에서 짝수 번째 자리 숫자의 합을 뺀 값이 11의 배수이면 그 수는 11의 배수이다.

마찬가지로 다항식을 일차식으로 나눌 때, 직접 나누지 않고도 그 나머지를 쉽게 구하는 방법이 있다.

탐구 활동

다항식 $P(x)=x^3+3x^2-1$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

● x에 대한 다항식을 일반적으로 나타내기 위해 $P(x)$를 사용한다. $P(x)$에서 P는 polynomial(다항식)의 첫 글자이다.

1. 다항식 $P(x)$를 $x-1$로 나눈 몫 $Q(x)$와 나머지 R를 구하고, $P(x)=(x-1)Q(x)+R$의 꼴로 나타내어 보자.
2. 1에서 구한 등식이 항등식인지 아닌지를 판단하고 그 이유를 설명하여 보자.
3. 다항식 $P(x)$에 $x=1$을 대입하여 $P(1)$의 값을 구하고, 1에서 구한 나머지 R와 비교하여 보자.

탐구 활동에서 다항식 $P(x)=x^3+3x^2-1$을 $x-1$로 나누면 몫은 x^2+4x+4이고, 나머지는 3이므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P(x)=(x-1)(x^2+4x+4)+3$$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=1$을 대입하면 $P(1)=3$이 되고, 이것은 $P(x)=x^3+3x^2-1$을 $x-1$로 나눌 때의 나머지와 같다.

일반적으로 x에 대한 다항식 $P(x)$를 일차식 $x-a$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 하면

$$P(x)=(x-a)Q(x)+R \ (R\text{는 상수})$$

이다. 이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=a$를 대입하면 다음이 성립한다.

$$P(a)=(a-a)Q(a)+R=R$$

즉, 다항식 $P(x)$를 일차식 $x-a$로 나눈 나머지 R는 $P(a)$와 같다.

이와 같이 다항식을 일차식으로 나눌 때의 나머지는 나눗셈을 직접 해 보지 않고도 쉽게 알 수 있다.

이상에서 다음과 같은 **나머지정리**를 얻는다.

나머지정리

x에 대한 다항식 $P(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나눌 때의 나머지를 R라고 하면

$$R=P(\alpha)$$

$P(x)$
$=x^3-x^2+2x+3$
$=(x-2)(x^2+x+4)+11$

보기 다항식 $P(x)=x^3-x^2+2x+3$을 $x-2$로 나눌 때의 나머지는

$$\begin{aligned}P(2)&=2^3-2^2+2\cdot2+3\\&=8-4+4+3\\&=11\end{aligned}$$

문제 1 다항식 $P(x)=x^3-5x^2+6x-4$를 다음 일차식으로 나눌 때의 나머지를 구하여라.

(1) $x+1$

(2) $x-2$

문제 2 다항식 $P(x)=x^3+ax^2+2x-1$을 $x-2$로 나눈 나머지가 -1일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

예제 01 다항식 $P(x)=4x^3-2x^2+5x-3$을 $2x-1$로 나눌 때의 나머지를 구하여라.

다항식 $P(x)$를 일차식 $ax-b$로 나눈 몫이 $Q(x)$일 때, $P(x)$를 $x-\frac{b}{a}$로 나눈 몫은 $aQ(x)$, 나머지는 $P\left(\frac{b}{a}\right)$이다.

풀이 다항식 $P(x)$를 $2x-1$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 하면

$$\begin{aligned}P(x)&=(2x-1)Q(x)+R\ (R\text{는 상수})\\&=2\left(x-\frac{1}{2}\right)Q(x)+R\end{aligned}$$

R는 다항식 $P(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나눈 나머지와 같으므로

$$R=P\left(\frac{1}{2}\right)=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+5\cdot\frac{1}{2}-3=-\frac{1}{2}$$

답 $-\frac{1}{2}$

문제 3 다항식 $P(x)=2x^3-3x-1$을 다음 일차식으로 나눌 때의 나머지를 구하여라.

(1) $2x-1$　　　　(2) $3x+1$

예제 02 다항식 $P(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지는 -2이고, $x-2$로 나눈 나머지는 1이다. 다항식 $P(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나눌 때의 나머지를 구하여라.

(나머지의 차수) <(나누는 다항식의 차수)

풀이 다항식 $P(x)$를 이차식 $(x+1)(x-2)$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라고 하면 $R(x)$는 일차 이하의 다항식이므로

$$R(x)=ax+b\ (a,\ b\text{는 상수})$$

로 놓을 수 있다. 즉,

$$P(x)=(x+1)(x-2)Q(x)+ax+b$$

다항식 $P(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지가 -2이므로

$$P(-1)=-a+b=-2 \qquad \cdots\cdots①$$

다항식 $P(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 1이므로

$$P(2)=2a+b=1 \qquad \cdots\cdots②$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-1$이므로

$$R(x)=x-1$$

답 $x-1$

문제 4 다항식 $P(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 3이고, $x+3$으로 나눈 나머지는 -1이다. 다항식 $P(x)$를 $(x-1)(x+3)$으로 나눌 때의 나머지를 구하여라.

인수정리란 무엇인가?

탐구 활동

다항식 $P(x)=x^3-3x^2-x+3$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 나머지정리를 이용하여 다항식 $P(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지를 구하여 보자.
2. 다항식 $P(x)$를 $x-1$로 나눈 몫이 $Q(x)$일 때, 다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.

$$P(x)=\square\cdot Q(x)+\square$$

x에 대한 다항식 $P(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나눌 때, 나머지정리에 의하여 $P(\alpha)=0$이면 $P(x)$는 $x-\alpha$로 나누어떨어진다. 또 $P(x)$가 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 $P(\alpha)=0$이 성립한다.

이상에서 다음과 같은 **인수정리**를 얻는다.

$P(x)$가 $x-\alpha$로 나누어떨어진다는 것은 $x-\alpha$가 $P(x)$의 인수임을 뜻하므로 인수정리라고 한다.

인수정리

x에 대한 다항식 $P(x)$에 대하여 $P(\alpha)=0$이면 $P(x)$는 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.
또 $P(x)$가 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 $P(\alpha)=0$이다.

예제 03 다항식 $P(x)=x^3-6x+a$가 $x-1$로 나누어떨어질 때, 상수 a의 값을 구하여라.

풀이 인수정리에 의하여 $P(1)=0$이므로

$$P(1)=1^3-6\cdot1+a=-5+a=0$$

따라서 $a=5$이다.

답 5

문제 5 다항식 $P(x)=x^3+2x^2+ax-5$가 $x+1$로 나누어떨어질 때, 상수 a의 값을 구하여라.

문제 6 다항식 $P(x)=x^3+ax+b$가 x^2-x-2로 나누어떨어질 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

발전 **문제 7** 다항식 $P(x)=x^4-2x^2+ax-b$는 $x+1$로 나누어떨어지고 $x-2$로 나눈 나머지가 3일 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

조립제법이란 무엇인가?

탐구 활동

다항식 $P(x)=2x^3-x^2-2x+3$을 $x-2$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 나머지정리를 이용하여 나머지 R를 구하여 보자.
2. 항등식 $P(x)=(x-2)Q(x)+R$에서 미정계수법을 이용하여 $Q(x)$를 구하여 보자.

나머지정리를 이용하면 다항식을 일차식으로 나눌 때의 나머지는 쉽게 구할 수 있지만 몫은 구할 수 없다.

이제 다항식을 일차식으로 나눌 때 나머지뿐만 아니라 몫까지 쉽게 구하는 방법에 대하여 알아보자.

다항식 $2x^3-x^2-2x+3$을 일차식 $x-2$로 나누면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{r l}
2x^2+3x+4 & \longleftarrow \text{몫} \\
x-2\,\overline{)\,2x^3-x^2-2x+3} & \longleftarrow 2\ (x^2\text{의 계수}) \\
2x^3-4x^2 & \\
\hline
3x^2-2x+3 & \longleftarrow 3\ (x\text{의 계수}) \\
3x^2-6x & \\
\hline
4x+3 & \longleftarrow 4\ (\text{상수항}) \\
4x-8 & \\
\hline
11 & \longleftarrow \text{나머지}
\end{array}
$$

따라서 몫은 $2x^2+3x+4$이고, 나머지는 11이다.

이때 각 항의 계수만 생각하여 다음과 같이 몫과 나머지를 간단히 구할 수 있다.

2	2	-1	-2	3
	↓	+ 4	+ 6	+ 8
	2 (x^2의 계수)	×2 → 3 (x의 계수)	×2 → 4 (상수항)	×2 → 11 (나머지)

몫: x^2의 계수, x의 계수, 상수항

이와 같이 다항식을 일차식으로 나눌 때, 계수만을 이용하여 몫과 나머지를 구하는 방법을 **조립제법**이라고 한다.

주의 조립제법에서 다항식의 각 항의 계수를 나열할 때, 계수가 0인 것도 반드시 표시하여야 한다.

다항식을 일차식으로 나눌 때
- 나머지만 구하려면 나머지정리를 이용한다.
- 몫과 나머지를 구하려면 조립제법을 이용한다.

보기 조립제법을 이용하여 $2x^3+3x^2-5x-4$를 $x+2$로 나눈 몫과 나머지를 구하면

-2	2	3	-5	-4
		-4	2	6
	2	-1	-3	2

따라서 몫은 $2x^2-x-3$, 나머지는 2이다.

문제 8 조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하여라.

(1) $(2x^3-3x^2+x+1)\div(x-3)$ (2) $(5x^3+4x^2+1)\div(x+1)$

예제 04

조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하여라.

$$(4x^3-2x^2+5x-3)\div(2x-1)$$

● $2x-1=2\left(x-\frac{1}{2}\right)$임을 이용한다.

풀이 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여

$4x^3-2x^2+5x-3$을 $x-\frac{1}{2}$로 나누면

$$4x^3-2x^2+5x-3=\left(x-\frac{1}{2}\right)(4x^2+5)-\frac{1}{2}$$

$$=(2x-1)\left(2x^2+\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2}$	4	-2	5	-3
		2	0	$\frac{5}{2}$
	4	0	5	$-\frac{1}{2}$

따라서 $4x^3-2x^2+5x-3$을 $2x-1$로 나눌 때의 몫은 $2x^2+\frac{5}{2}$, 나머지는 $-\frac{1}{2}$이다.

답 몫: $2x^2+\frac{5}{2}$, 나머지: $-\frac{1}{2}$

문제 9 조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하여라.

(1) $(2x^3-3x^2+x+4)\div(2x+3)$ (2) $(x^3+2x^2+3x+1)\div\left(\frac{1}{2}x+1\right)$

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

자연수 n에 대하여 x^n을 $x-1$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 하면 $x^n=(x-1)Q(x)+R$가 성립한다. 이를 이용하여 102^{100}을 101로 나눈 나머지를 구하여라.



중단원 기초

1 다음 등식이 x에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b, c의 값을 각각 구하여라.

01 항등식
미정계수법

(1) $2x-a-1=(b+3)x+3$

(2) $ax^2+x-3=x^2+bx+c$

(3) $3x^2-x+5=3(x-1)^2+a(x-1)+b$

2 다항식 $P(x)=x^3-x+3$을 다음 일차식으로 나눌 때의 나머지를 구하여라.

02 나머지정리

(1) $x+1$ (2) $x-2$

3 다음 일차식 중에서 다항식 x^3-7x+6의 인수인 것을 모두 찾아라.

02 나머지정리
인수정리

㉠ $x-1$	㉡ $x+1$	㉢ $x-2$	㉣ $x+2$

4 다음 다항식이 $x+1$로 나누어떨어질 때, 상수 a의 값을 구하여라.

02 나머지정리
인수정리

(1) $x^2+ax+2a+1$

(2) $x^3-2ax^2+x+a-1$

5 조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하여라.

02 나머지정리
조립제법

(1) $(x^3-x^2+2x-8)\div(x+1)$

(2) $(3x^3-x^2-3x+2)\div(x-2)$

중단원 기본

1 등식 $2x^2-3x+2=ax(x-1)+b(x-1)(x+1)+cx(x+1)$이 x에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b, c의 값을 각각 구하여라.

01 항등식
미정계수법

2 등식 $(m^2+m)a+(m-1)b+(m^2-1)c=2$가 m의 값에 관계없이 항상 성립하도록 상수 a, b, c의 값을 각각 구하여라.

01 항등식
미정계수법

3 다항식 $P(x)$를 $2x+4$, $x-\frac{2}{3}$로 나눈 나머지가 각각 3, 7일 때, 다항식 $P(x)$를 $(x+2)(3x-2)$로 나눌 때의 나머지를 구하여라.

02 나머지정리

4 다항식 $P(x)=x^3+ax^2+bx+2$는 $x-1$로 나누어떨어지고 $x+2$로 나눈 나머지가 6일 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

02 나머지정리
나머지정리와 인수정리

5 다음은 조립제법을 이용하여 x^3-x+4를 $x+2$로 나눌 때의 몫과 나머지를 구하는 과정이다. $a+b+c+d+e$의 값을 구하여라.

a	1	b	-1	4
		-2	d	e
	1	c	3	-2

02 나머지정리
조립제법

중단원 실력

1 함수 $y=(2k+1)x+4k-3$의 그래프는 k의 값에 관계없이 점 P를 반드시 지난다고 한다. 이때 점 P의 좌표를 구하여라.

01 항등식
미정계수법

2 자연수 n에 대하여 다항식 $x^n(x^2-ax+b)$를 $(x-2)^2$으로 나눈 나머지가 $2^n(x-2)$일 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

01 항등식
미정계수법

3 이차식 $P(x)$에 대하여 $P(1-x)$는 $x-1$로 나눈 나머지가 -4이고, $xP(x)$는 $(x+1)(x-4)$로 나누어떨어진다. 이때 $P(x)$를 $x+2$로 나눈 나머지를 구하여라.

02 나머지정리
나머지정리와 인수정리

4 다항식 $\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)^{10}$을 $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$로 나눈 나머지를 $R(x)$라고 할 때, $R(-2)$의 값을 구하여라.

02 나머지정리

5 다항식 $P(x)=2x^3+x^2-3$을 $a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$의 꼴로 나타내었을 때, 상수 a, b, c, d의 값을 각각 구하여라.

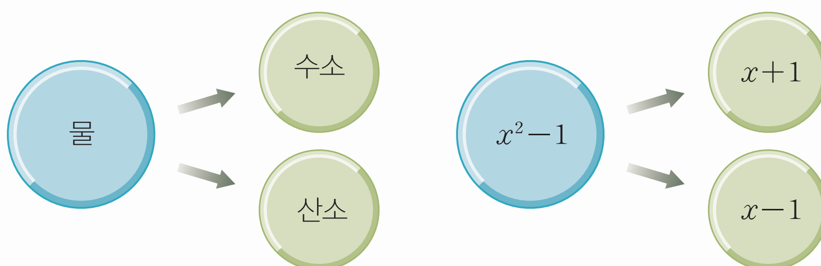
02 나머지정리
조립제법

3

인수분해

물의 분해와 인수분해

생명체가 살아가는 데 있어서 중요한 물질인 물은 전기 에너지로 반응을 일으키면 수소와 산소로 분해된다. 마찬가지로 다항식 x^2-1은 인수분해를 이용하여 두 다항식 $x+1$, $x-1$의 곱으로 나타낼 수 있다. 즉, $x^2-1=(x+1)(x-1)$이다.







단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자.

48쪽

인수분해를 이용하여 복잡한 계산을 쉽게 할 수 있을까?

01

인수분해

● 다항식의 인수분해를 할 수 있다.

인수분해란 무엇인가?



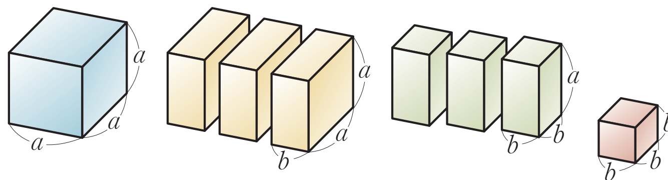
생각 열기

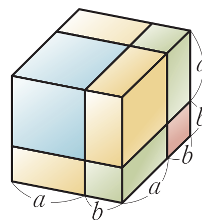
정육면체 분할 퍼즐

정육면체를 분할한 조각으로 이루어진 퍼즐에는 여러 가지가 있다. 그중 덴마크의 물리학자 피에트 헤인(Piet Hein ; 1905~1996)이 개발한 소마 큐브는 오른쪽 그림과 같이 크기가 같은 정육면체 3개 또는 4개로 조합된 7개의 블록으로 $3\times3\times3$ 정육면체를 비롯한 여러 가지 모양을 만드는 퍼즐이다.

탐구 활동

다음 그림과 같이 직육면체 퍼즐 조각 8개가 있다. 물음에 답하여 보자.





1. 이 조각들의 부피의 합을 식으로 나타내어 보자.
2. 주어진 조각으로 오른쪽 그림과 같은 정육면체를 만들었을 때, 이 정육면체의 부피를 식으로 나타내어 보자.
3. 1과 2의 결과를 등식으로 나타내어 보자.

다항식 x^2+3x+2는 $x+1$과 $x+2$의 곱으로 나타낼 수 있다. 이와 같이 하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타내는 것을 인수분해라고 함을 중학교에서 배웠다.

$$x^2+3x+2 \underset{\text{전개}}{\overset{\text{인수분해}}{\rightleftarrows}} (x+1)(x+2)$$

다음은 중학교에서 배운 인수분해 공식이다.

인수분해 공식 [1]

(1) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

(2) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(3) $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

(4) $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

인수분해는 다항식의 전개 과정을 거꾸로 생각한 것이므로 앞에서 배운 곱셈 공식으로부터 다음 인수분해 공식을 얻는다.

인수분해 공식 [2]

(1) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

(2) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

예제 01 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $a^3-6a^2+12a-8$　　(2) $27x^3+8y^3$

이 단원에서는 계수가 유리수인 경우까지 인수분해하기로 한다.

풀이 (1) $a^3-6a^2+12a-8=a^3-3\cdot a^2\cdot 2+3\cdot a\cdot 2^2-2^3$

$=(a-2)^3$

(2) $27x^3+8y^3=(3x)^3+(2y)^3$

$=(3x+2y)\{(3x)^2-3x\cdot 2y+(2y)^2\}$

$=(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)$

답 (1) $(a-2)^3$　(2) $(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)$

문제 1 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $x^3+9x^2+27x+27$　　(2) $64a^3-48a^2+12a-1$

(3) $8x^3+y^3$　　(4) a^3-27b^3

문제 2 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $2a^3+12a^2+24a+16$ (2) $8a^4b-27ab^4$

복잡한 식의 인수분해는 어떻게 하는가?

탐구 활동 **다음 물음에 답하여 보자.**

1. 다항식 x^2-3x+2를 인수분해하여 보자.

2. x^2-3x+2에서 x 대신에 $a+b$를 넣어 등식을 만들어 보자.

3. **1**의 결과에 x 대신 $a+b$를 넣어 **2**의 결과와 비교하여 보자.

탐구 활동의 다항식 $(a+b)^2-3(a+b)+2$에서 $a+b$를 X로 놓으면 인수분해 공식을 이용하여 다음과 같이 인수분해할 수 있다.

$$(a+b)^2-3(a+b)+2=X^2-3X+2=(X-1)(X-2)$$
$$=(a+b-1)(a+b-2)$$

예제 02 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $(x+4)^2-(x+4)-12$ (2) x^4-8x^2-9

다항식에 공통부분이 있는 경우에는 공통부분을 한 문자로 바꾸어 인수분해하면 편리하다.

풀이 (1) $x+4=X$로 놓으면

$$(x+4)^2-(x+4)-12=X^2-X-12=(X+3)(X-4)$$
$$=(x+4+3)(x+4-4)=x(x+7)$$

(2) $x^2=X$로 놓으면

$$x^4-8x^2-9=X^2-8X-9=(X+1)(X-9)$$
$$=(x^2+1)(x^2-9)=(x^2+1)(x+3)(x-3)$$

답 (1) $x(x+7)$ (2) $(x^2+1)(x+3)(x-3)$

문제 3 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $(x-1)^2+3(x-1)-10$ (2) x^4-7x^2+12

(3) $(x^2-2x)^2-4(x^2-2x)+4$ (4) $(x^2+6x)(x^2+6x-2)-8$

공통부분이 없거나 인수분해 공식을 직접 이용하기 어려운 다항식은 식을 변형하여 인수분해하면 편리하다.

예제 03 다항식 x^4+x^2+1을 인수분해하여라.

풀이 $x^4+x^2+1=(x^4+2x^2+1)-x^2$

$=(x^2+1)^2-x^2$

$=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

답 $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

문제 4 다음 식을 인수분해하여라.

(1) x^4+x^2+25

(2) x^4+4

(3) $x^4+3x^2y^2+4y^4$

(4) $x^4-6x^2y^2+y^4$

여러 가지 문자를 포함하는 다항식은 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리하면 쉽게 인수분해되는 경우가 있다.

예제 04 다항식 $b^2-3b+ab-2a+2$를 인수분해하여라.

풀이 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면

$b^2-3b+ab-2a+2=(b-2)a+(b^2-3b+2)$

$=(b-2)a+(b-1)(b-2)$

$=(b-2)(a+b-1)$

답 $(b-2)(a+b-1)$

문제 5 다음 식을 인수분해하여라.

모든 문자의 차수가 같은 경우에는 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다.

(1) $a^2+ab+a-b-2$

(2) $x^2+xy-2y^2+3y-1$

(3) $a^3-a^2b+ab^2+ac^2-b^3-bc^2$

(4) $x^2-2xy-3y^2+4x-4y+4$

인수정리를 이용한 인수분해는 어떻게 하는가?

삼차 이상의 다항식의 인수분해는 인수정리를 이용한다.

인수정리를 이용하여 인수분해하는 방법을 알아보자.

다항식 $P(x)$에 대하여 $P(\alpha)=0$이면 $x-\alpha$는 $P(x)$의 인수이므로

$$P(x)=(x-\alpha)Q(x)$$

와 같이 나타낼 수 있고, 몫 $Q(x)$는 조립제법을 이용하여 구할 수 있다.

예를 들어 다항식 $P(x)=x^3-3x^2+4x-2$는 최고차항의 계수가 1이므로

$$x^3-3x^2+4x-2=(x-\alpha)(x^2+bx+c) \qquad \cdots\cdots ①$$

와 같이 정수를 계수로 하는 두 다항식의 곱으로 인수분해된다고 하자.

①은 x에 대한 항등식이므로 양변의 상수항을 비교하면 $-2=-\alpha c$, 즉 $\alpha c=2$이다.

따라서 α는 두 정수를 곱하여 2가 되는 $1, -1, 2, -2$ 중의 하나이다.

이때 $P(1)=1^3-3\cdot1^2+4\cdot1-2=0$이므로 인수정리에 의하여 $x-1$은 $P(x)$의 인수이다.

따라서 조립제법을 이용하여 몫을 구하면 $P(x)$는 다음과 같이 인수분해됨을 알 수 있다.

$$P(x)=(x-1)(x^2-2x+2)$$

1	1	−3	4	−2
		1	−2	2
	1	−2	2	0

예제 05 다항식 x^3-3x-2를 인수분해하여라.

풀이 $P(x)=x^3-3x-2$로 놓으면

$$P(-1)=(-1)^3-3\cdot(-1)-2=0$$

이므로 인수정리에 의하여 $x+1$은 $P(x)$의 인수이다.

조립제법을 이용하여 인수분해하면

−1	1	0	−3	−2
		−1	1	2
	1	−1	−2	0

$$\begin{aligned}P(x)&=(x+1)(x^2-x-2)\\&=(x+1)(x+1)(x-2)\\&=(x+1)^2(x-2)\end{aligned}$$

답 $(x+1)^2(x-2)$

문제 6 다음 식을 인수분해하여라.

(1) x^3-4x^2+x+6 (2) $x^4-x^3+2x^2+x-3$

발전

문제 7 다항식 $P(x)=x^3-8x^2+kx+14$가 $x-2$로 나누어떨어질 때, 상수 k의 값을 구하고 $P(x)$를 인수분해하여라.

예제 06

다항식 $2x^3-3x^2+3x-1$을 인수분해하여라.

풀이 $P(x)=2x^3-3x^2+3x-1$로 놓고

$P(x)=(ax-b)(cx^2+dx+e)$ (a, b, c, d, e는 정수) …… ①

의 꼴로 인수분해된다고 하면 ①은 항등식이므로 $ac=2$, $be=1$이다.

a는 $1, -1, 2, -2$ 중의 하나, b는 $1, -1$ 중의 하나이므로

$P\left(\frac{b}{a}\right)=0$에서 $\frac{b}{a}$의 값은 $1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ 중의 하나이다.

$x=\frac{1}{2}$을 대입하면 $P\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\cdot\frac{1}{2}-1=0$

$x-\frac{1}{2}$은 $P(x)$의 인수이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$\frac{1}{2}$	2	−3	3	−1
		1	−1	1
	2	−2	2	0

$P(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2-2x+2)$

$=\frac{1}{2}(2x-1)\cdot 2(x^2-x+1)$

$=(2x-1)(x^2-x+1)$

답 $(2x-1)(x^2-x+1)$

문제 8 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $2x^3+3x^2+3x+1$ (2) $2x^4+5x^3-5x^2-5x+3$

단원 과제



앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

인수분해를 이용하여 $\frac{998^3-1}{998\times999+1}$의 값을 구하여 보자.

[해답 p.216]

1 다음 식을 인수분해하여라.

(1) x^3+4x^2+4x (2) $6x^4-15x^3-9x^2$

(3) x^3+x^2-x-1 (4) x^2y+xy^2+x+y

01 인수분해
공통인수가 있는 경우의 인수분해

2 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $8a^3+12a^2+6a+1$ (2) $x^3-9x^2y+27xy^2-27y^3$

(3) a^3+8 (4) $27x^3-8y^3$

01 인수분해
인수분해 공식

3 다음 식을 인수분해하여라.

(1) x^4-13x^2+36

(2) $(x+y)^2-2(x+y)+1$

01 인수분해
복잡한 식의 인수분해

4 다음 식을 인수분해하여라.

(1) x^3+x^2-2 (2) x^3+2x^2-5x-6

(3) $x^4+x^3-3x^2-x+2$ (4) x^4-4x^2+x-2

01 인수분해
인수정리를 이용한 인수분해

5 부피가 $a^3+6a^2+11a+6$인 직육면체의 밑면의 넓이가 $(a+1)(a+2)$이다. 이 직육면체의 높이를 인수분해를 이용하여 구하여라.

01 인수분해
인수분해의 활용

[해답 p.216]

중단원 기본

1 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12$

(2) $(x^2-3x)^2-2x^2+6x-8$

(3) $x^4-3x^2y^2+2y^4$

(4) $(x^2-2x-5)(x^2-2x-6)-6$

01 인수분해
복잡한 식의 인수분해

2 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $x^2+2xy-3y^2+4y-1$

(2) $2x^2-y^2-xy-7x+y+6$

01 인수분해
복잡한 식의 인수분해

3 다항식 $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$를 인수분해하여라.

01 인수분해
복잡한 식의 인수분해

4 다항식 x^3-x^2+x+a가 $x+1$로 나누어떨어질 때, 상수 a의 값을 구하고 이 식을 인수분해하여라.

01 인수분해
인수정리를 이용한 인수분해

5 $a-b=102$일 때, $a^2+b^2-2ab-3a+3b+2$의 값을 구하여라.

01 인수분해

[해답 p.216]

중단원 실력

수준별 학습

1 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $a^4+a^2b^2+b^4$

(2) x^4+3x^2+4

(3) $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

01 인수분해
복잡한 식의 인수분해

2 다항식 $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+k$가 x에 대한 이차식의 완전제곱꼴로 인수분해될 때, 상수 k의 값을 구하여라.

01 인수분해
복잡한 식의 인수분해

3 $x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$을 이용하여 다음을 계산하여라.

$$\frac{900\cdot 901+1}{931}$$

01 인수분해

4 $a+b+c=0$일 때, $a^3+b^3+c^3-3abc$의 값을 구하여라.

01 인수분해

5 세 실수 a, b, c가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, 다음 조건을 만족시키는 삼각형은 어떤 삼각형인지 말하여라.

$$a^3+a^2b-ac^2+ab^2+b^3-bc^2=0$$

01 인수분해
인수분해의 활용

수행 과제

소수의 판별

현대 사회는 정보화 사회에 접어들면서 암호 체계를 구축하는 데 많은 노력을 쏟고 있으며, 그 핵심에는 소수가 자리 잡고 있다. 수학자들도 오래전부터 이러한 소수에 많은 관심을 기울였다.

특히 소수를 만드는 공식이나 방법에 대한 연구가 오랫동안 진행되었지만 현재까지 아무도 성공하지 못하였다. 하지만 특정한 수가 소수인지 아닌지는 인수분해를 통해 어느 정도 판단할 수 있다.

예를 들어 1000001이 소인수분해가 되면 합성수이고, 소인수분해가 불가능하면 소수이다. 그런데 1000001은 다음과 같이 인수분해 공식을 이용하여 소인수분해할 수 있다.

$$\begin{aligned} 1000001 &= 1000000+1=100^3+1^3 \\ &= (100+1)(100^2-100\cdot 1+1^2) \\ &= 101\cdot 9901 \end{aligned}$$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

따라서 1000001은 소수가 아니다.



| 과 제 | 1 다음 수가 소수인지 아닌지 판별하고, 그 이유를 설명하여라.

(1) 27001 (2) 9991 (3) 1729

| 과 제 | 2 $100^2-98^2+96^2-94^2+\cdots+8^2-6^2+4^2-2^2$이 소수인지 아닌지 판별하고, 그 이유를 설명하여라.

대단원 학습 내용 정리

1 다항식의 연산

다항식의 덧셈과 뺄셈에 대한 성질

세 다항식 A, B, C에 대하여

(1) $A+B=B+A$ [교환법칙]

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$ [결합법칙]

다항식의 곱셈

(1) 다항식의 곱셈에 대한 성질

세 다항식 A, B, C에 대하여

(i) $AB=BA$ [교환법칙]

(ii) $(AB)C=A(BC)$ [결합법칙]

(iii) $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$ [분배법칙]

(2) 곱셈 공식

(i) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(ii) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

다항식의 나눗셈

다항식 A를 다항식 $B\,(B\neq 0)$로 나눌 때의 몫을 Q, 나머지를 R라고 하면

$A=BQ+R$ (단, (R의 차수)$<$(B의 차수))

2 나머지정리

항등식의 성질

(1) $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면 $a=0$, $b=0$, $c=0$이다.

또 $a=0$, $b=0$, $c=0$이면 $ax^2+bx+c=0$은 x에 대한 항등식이다.

(2) $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이면 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$이다.

또 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$이면 $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$은 x에 대한 항등식이다.

나머지정리

(1) x에 대한 다항식 $P(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나눌 때의 나머지를 R라고 하면 $R=P(\alpha)$

(2) x에 대한 다항식 $P(x)$를 일차식 $ax-b$로 나눌 때의 나머지를 R라고 하면 $R=P\left(\frac{b}{a}\right)$

인수정리

x에 대한 다항식 $P(x)$에 대하여 $P(\alpha)=0$이면 $P(x)$는 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.

또 $P(x)$가 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 $P(\alpha)=0$이다.

조립제법

각 항의 계수만을 이용하여 다항식을 일차식으로 나눈 몫과 나머지를 구하는 방법을 조립제법이라고 한다.

3 인수분해

인수분해 공식

(1) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

(2) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

인수분해하는 방법

(1) 공통인수가 있으면 묶는다.

(2) 공식을 이용할 수 있으면 이용한다.

(3) 식을 변형하거나 공통부분을 한 문자로 바꾸어 공식을 이용할 수 있는지 조사한다.

(4) 여러 가지 문자를 포함하는 다항식은 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해한다.

(5) 삼차 이상의 다항식의 인수분해는 인수정리를 이용한다.

용어와 기호 미정계수법, 나머지정리, 인수정리, 조립제법

대/단/원 평가 문제

선택형

1 세 다항식 $A=x^2+2xy+y^2$, $B=x^2-2xy+y^2$, $C=3x^2-4y^2$에 대하여

$$X+2A=3(A+B)-C$$

를 만족시키는 다항식 X는?

① $x^2+4xy+8y^2$　② $x^2-4xy+8y^2$
③ $x^2+6xy+8y^2$　④ $x^2-8xy+8y^2$
⑤ x^2+8y^2

2 $(3x-2y)^3$을 전개하였을 때, xy^2의 계수는?

① -36　② -18　③ 0
④ 18　⑤ 36

3 $(a-b-2c)^2$을 전개하면?

① $a^2+b^2+c^2-2ab+4bc-4a$
② $a^2+b^2+4c^2+2ab+4bc-4ca$
③ $a^2+b^2+4c^2-2ab+4bc-4ca$
④ $a^2+b^2+4c^2-2ab-4bc-4ca$
⑤ $a^2+b^2+4c^2-2ab-4bc+4ca$

4 $x-y=3$, $x^3-y^3=72$일 때, xy의 값은?

① 1　② 3　③ 5
④ 7　⑤ 9

5 등식

$a(x-1)(x+1)-b(x-2)(x+3)=x^2-x+4$

가 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

6 다항식 $P(x)=4x^3-3x-2$를 $x+1$과 $2x+1$로 나눈 나머지를 각각 a, b라고 할 때, ab의 값은?

① -9　② -3　③ 0
④ 3　⑤ 9

7 다항식 $P(x)$를 $x+1$, $x-3$으로 나눈 나머지가 각각 3, -1일 때, 다항식 $P(x)$를 $(x+1)(x-3)$으로 나눈 나머지는?

① $x-2$　② $x-1$　③ $x+2$
④ $-x+1$　⑤ $-x+2$

8 다항식 x^3+kx^2+x-2가 $x-2$로 나누어떨어질 때, 상수 k의 값은?

① -3　② -2　③ -1
④ 2　⑤ 3

9 다항식 $5x^3+3x^2+1$을 $x+1$로 나눈 몫은?

① $5x^2-2x-2$　② $5x^2-2x+2$
③ $5x^2-5x+8$　④ $5x^2+5x+8$
⑤ $5x^2+8x+8$

10 다음 중에서 다항식 $x^2-2y^2-xy-4x-y+3$의 인수는?

① $x+y+1$　② $x-y+1$
③ $x-y+3$　④ $x+2y-3$
⑤ $x-2y-3$

11 인수분해 공식을 이용하여 $\dfrac{197^2-1}{199^2-1}\times\dfrac{199^3+1}{199^2-199+1}$을 계산하면?

① 194　② 196　③ 198
④ 200　⑤ 202

12 두 다항식 $P(x)=x^3+2x^2-x-2$와 $Q(x)=x^3-4x^2+x+6$의 공통인수는?

① $x-3$　② $x-1$　③ $x+1$
④ $x+2$　⑤ $x+3$

서답형

13 다항식 $P(x)=x^3+ax^2+bx+7$을 $(x+1)(x-2)$로 나눈 나머지가 $x+1$일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 상수 a, b의 값을 구하여라.
(2) 다항식 $P(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나눈 몫을 구하여라.

14 다항식 $P(x)=x^2+xy-2y^2-2x-y+1$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 다항식 $P(x)$를 x에 대하여 내림차순으로 정리하여라.
(2) (1)에서 정리한 식이 x에 대한 다항식이라고 할 때, 상수항을 인수분해하여라.
(3) 다항식 $P(x)$를 인수분해하여라.

|서|술|형|

15 등식 $x^2-4x+3=a(x+1)^2+b(x+1)+c$가 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

|서|술|형|

16 다항식 $P(x)$를 $x-1$, $x-2$로 나눈 나머지가 각각 2, 3이고, 각 항의 계수가 모두 정수일 때, 차수가 가장 낮은 다항식 $P(x)$를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

M+ History

수학 + 역사

수학 기호는 누가 언제부터 사용했을까?

수학은 기호의 학문이라고 한다. 고대 그리스에서 수학 기호를 사용한 흔적들이 있지만 본격적으로 사용한 것은 16세기 초 유럽에서 대수학이 발달하면서부터이다. 수학자들은 누구보다도 기호의 편리성을 절감하고 있었기에 수학이 발달할수록 새로운 수학 기호가 많이 만들어졌다. 그렇다면 가장 많이 사용하는 =, +, −, ×, ÷는 각각 누가 만들었을까?

등호 =는 1557년 영국의 수학자 레코드(Recorde, R. ; 1510~1558)의 "지혜의 숫돌"이라는 책에서 처음 사용되었다. 평행한 두 선을 길게 그어 양쪽이 서로 같다는 뜻을 나타내었는데 당시에는 등호가 지금보다 훨씬 길었다고 한다.

덧셈 기호 +는 13세기경 이탈리아의 수학자 피보나치(Fibonacci ; 1170~1250)가 처음 사용하였다고 알려졌으며, 덧셈을 뜻하는 라틴어 'et'가 줄어서 +가 되었다고 한다.

뺄셈 기호 −는 '모자라다'는 뜻의 라틴어 'minus'를 간단히 $\overline{m}$으로 사용하던 것을 독일의 수학자 비트만(Widmann, J. ; 1462~1498)이 위의 −만 따서 사용했다고 한다.

곱셈 기호 ×는 1631년 영국의 수학자 오트레드(Oughtred, W. ; 1574~1660)가 "수학의 열쇠"라는 책에서 처음 사용하였다. 이후 다항식에서는 × 대신에 ·을 사용하기도 했다.

나눗셈 기호 ÷는 분수를 나타내던 모양으로 10세기경부터 사용되었는데, 원래 비를 나타내는 기호 :에서 유래되었다.



컴퓨터를 이용하여 몫과 나머지 구하기

삼차식 ax^3+bx^2+cx+d를 $x-k$로 나눌 때의 몫과 나머지를 컴퓨터 프로그램을 활용하여 구할 수 있다. 다음은 스프레드시트에서 조립제법을 이용하여 나눗셈 $(5x^3-13x^2+10x-8)\div(x-2)$의 몫과 나머지를 구하는 방법이다.

① 셀 A1에 2를 입력한다.
② 셀 B1, C1, D1, E1에 삼차식의 각 항의 계수인 5, -13, 10, -8을 차례로 입력한다.
③ 셀 B3에 '=B1' 을 입력한다.
④ 셀 C2에 '=A1 * B3' 을 입력하고 셀 E2까지 드래그한다.
⑤ 셀 C3에 '=C1+C2' 를 입력하고 셀 E3까지 드래그한다.

이때 셀 B3, C3, D3의 값 5, -3, 4가 몫의 계수이고, 셀 E3의 값 0이 나머지이다. 즉,

몫: $5x^2-3x+4$

나머지: 0

이다.

나누는 식 $x-k$에서 k의 값과 삼차식 ax^3+bx^2+cx+d에서 계수 a, b, c, d의 값이 달라질 때마다 셀 A1과 셀 B1, C1, D1, E1의 값을 각각 바꾸어 입력하면 바뀌어진 몫과 나머지를 구할 수 있다.

수 학 + 공 학





경유를 얻을 수 있는 원유의 끓는 온도, 우체국의 소포 요금 기준 등은
부등식으로 표현할 수 있다.

방정식과 부등식

II

|준|비|학|습|

중 ③ 이차방정식

1 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $x^2+2x-15=0$　　(2) $2x^2+x-8=0$

중 ② 연립일차방정식, 연립일차부등식

2 다음 연립일차방정식과 연립일차부등식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} 2x+3y=-8 \\ x-2y=3 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 8x-5\le 10x+1 \\ 2+6x<3x+8 \end{cases}$

수학 I 인수분해

3 다음 식을 인수분해하여라.

(1) x^3+3x^2+x-5　　(2) x^3-4x^2+x+6

1 복소수와 이차방정식

수의 범위가 넓어지다.



인류는 수를 표현할 때 상형 문자나 쐐기 문자, 갑골 문자를 사용하여 나타내다가 점차 추상적인 기호를 사용하기 시작하였다. 그에 따라 수학이 발전하게 되었고, 결과적으로 수의 확장이 자연스럽게 이루어졌다. 그 과정에서 피타고라스학파는 모든 수는 정수와 유리수로 이루어져 있다고 믿었으며 중세의 뛰어난 수학자 파스칼(Pascal, B. ; 1623～1662)조차도 "0에서 4를 빼면 0이 된다는 것을 모르는 사람이 있다."라는 말을 할 정도로 음수를 인정하지 않았다. 그러나 19세기부터 수의 범위는 실수를 넘어 복소수까지 확장되어 수학 발전의 밑거름이 되었다.



단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 69쪽

수학의 역사에서 수는 어떻게 확장되어 왔을까?

01

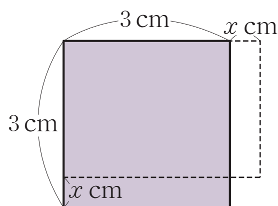
복소수

● 복소수의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 사칙계산을 할 수 있다.

복소수란 무엇인가?

탐구 활동

다음 그림과 같이 한 변의 길이가 3 cm인 정사각형에서 가로의 길이를 x cm만큼 늘리고 세로의 길이를 x cm만큼 줄여서 직사각형을 만들려고 한다. 물음에 답하여 보자.



1. 넓이가 5 cm^2인 직사각형이 되도록 하는 실수 x의 값을 구하여 보자.

2. 넓이가 6 cm^2인 직사각형이 되도록 하는 실수 x의 값을 구하여 보자.

3. 넓이가 10 cm^2인 직사각형이 되도록 하는 실수 x의 값이 존재하는지 생각하여 보자.

제곱하여 -1이 되는 실수는 존재하지 않으므로 방정식 $x^2=-1$은 실수의 범위에서는 해를 가지지 않는다. 따라서 이와 같은 방정식이 해를 가지도록 하기 위해서는 수의 범위를 확장하여야 한다.

이제 제곱하여 -1이 되는 새로운 수 하나를 생각하여 그것을 $\boldsymbol{i}$로 나타내기로 하자. 즉,

$$i^2=-1\ (i=\sqrt{-1})$$

이다. 이때 i를 **허수단위**라고 한다.

● 허수단위 i는 허수를 뜻하는 영어 imaginary number의 첫 글자를 따온 것으로 오일러(Euler, L. ; 1707~1783)가 처음 사용하였다.

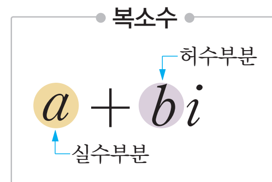


오일러

또 임의의 두 실수 a, b에 대하여

$$\boldsymbol{a+bi}$$

의 꼴로 나타나는 수를 **복소수**라 하고, a를 이 복소수의 **실수부분**, b를 **허수부분**이라고 한다.



임의의 실수 a는 $a+0i$의 꼴로 나타낼 수 있으므로 실수도 복소수이다.

한편 실수가 아닌 복소수 $a+bi\ (b\neq0)$를 **허수**라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

복소수의 분류

a, b가 실수일 때 $(i=\sqrt{-1})$

$$\text{복소수}(a+bi)\begin{cases}\text{실수}(b=0)\\ \text{허수}(b\neq 0)\end{cases}$$

보기 -2, $1+\sqrt{3}$, $2-i$, $5i$는 모두 복수이다. 여기서 -2, $1+\sqrt{3}$은 실수이고 $2-i$, $5i$는 허수이다.

문제 1 다음 복소수 중에서 실수, 허수를 각각 찾아라.

$$2+3i,\quad \sqrt{5}-2i,\quad \frac{1}{2}i,\quad 4$$

복소수가 서로 같을 조건은 무엇인가?

두 복소수의 실수부분과 허수부분이 각각 같을 때, 두 복소수는 서로 같다고 한다.

즉, 두 복소수 $a+bi$와 $c+di$ $(a, b, c, d$는 실수$)$에 대하여

$$a=c,\ \ b=d$$

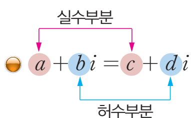
일 때, 두 복소수는 서로 같다고 한다.

특히 $a+bi=0$이면

$$a=0,\ \ b=0$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.



복소수가 서로 같을 조건

a, b, c, d가 실수일 때

(1) $a+bi=c+di$이면 $a=c$, $b=d$이다.
  또 $a=c$, $b=d$이면 $a+bi=c+di$이다.

(2) $a+bi=0$이면 $a=0$, $b=0$이다.
  또 $a=0$, $b=0$이면 $a+bi=0$이다.

예제 01 다음 등식을 만족시키는 실수 x, y의 값을 구하여라.

(1) $x+(y+1)i=2+3i$ (2) $(x-5)+(y+2)i=0$

풀이 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

(1) $x=2$, $y+1=3$이므로 $x=2$, $y=2$

(2) $x-5=0$, $y+2=0$이므로 $x=5$, $y=-2$

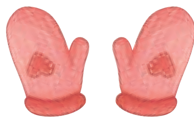
답 (1) $x=2$, $y=2$ (2) $x=5$, $y=-2$

문제 2 다음 등식을 만족시키는 실수 x, y의 값을 구하여라.

(1) $x+3yi=6i$ (2) $(3x+2y)+(x+y)i=-1+i$

켤레복소수란 무엇인가?

● '한 켤레의 장갑'과 같이 서로 짝이 되는 복소수를 켤레복소수라고 한다.



a, b가 실수일 때, 복소수 $a+bi$에 대하여 허수부분의 부호를 바꾼 복소수 $a-bi$를 복소수 $a+bi$의 **켤레복소수**라고 하며, 이것을 기호로

$$\overline{a+bi}$$

와 같이 나타낸다. 즉,

$$\overline{a+bi}=a-bi$$

이다. 한편 $\overline{a-bi}=a+bi$이므로 $a+bi$와 $a-bi$는 서로 켤레복소수이다.

보기 (1) $\overline{2+3i}=2-3i$ (2) $\overline{2i}=-2i$ (3) $\overline{-3}=-3$

문제 3 다음 복소수의 켤레복소수를 구하여라.

(1) $5+4i$ (2) $1-\sqrt{2}i$

(3) $5i$ (4) -4

사고력 기르기

추론
▶ 의사소통
문제 해결

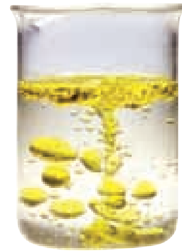
복소수 z의 켤레복소수를 $\overline{z}$라고 할 때, $z=\overline{z}$가 성립하는 복소수 z는 어떤 특징이 있는지 토의하여 보자.

복소수의 사칙계산은 어떻게 하는가?

생각 열기

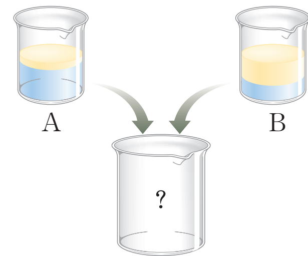
액체 혼합하기

서로 다른 두 액체를 혼합할 때, 서로 섞이는 경우와 섞이지 않는 경우가 있다. 이를테면 물과 아세톤을 혼합하거나 식용유와 아세톤을 혼합하면 서로 섞이지만 물과 식용유를 혼합할 경우에는 서로 섞이지 않는다.



탐구 활동

비커 A에는 물 a mL와 식용유 b mL가 들어 있고, 비커 B에는 물 c mL와 식용유 d mL가 들어 있다. 다음 물음에 답하여 보자.



1. 두 비커 A, B에 들어 있는 물과 식용유를 큰 비커에 부었을 때, 큰 비커에 담긴 물과 식용유는 어떤 모습인지 말하여 보고, 각각의 양이 얼마인지 구하여 보자.

2. 물과 식용유가 섞이지 않는 것처럼 수학에서 합을 계산할 때 각각 따로 계산하는 것에는 어떤 것이 있는지 말하여 보자.

근호를 포함한 식의 덧셈과 뺄셈에서는 다음과 같이 근호가 있는 수를 하나의 문자로 생각하여 계산하였다.

$$(4+3\sqrt{2})+(2+\sqrt{2})=(4+2)+(3+1)\sqrt{2}=6+4\sqrt{2}$$
$$(4+3\sqrt{2})-(2+\sqrt{2})=(4-2)+(3-1)\sqrt{2}=2+2\sqrt{2}$$

이와 마찬가지로 복소수의 덧셈과 뺄셈도 허수단위 i를 하나의 문자로 생각하여 실수부분은 실수부분끼리, 허수부분은 허수부분끼리 계산한다.

즉, a, b, c, d가 실수일 때

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$
$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

이다.

예를 들면

$$(4+3i)+(2+i)=(4+2)+(3+1)i=6+4i$$
$$(4+3i)-(2+i)=(4-2)+(3-1)i=2+2i$$

와 같이 계산한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

복소수의 덧셈과 뺄셈

a, b, c, d가 실수일 때

(1) $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

(2) $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

예제 02 다음을 계산하여라.

(1) $(5+4i)+(3-i)$

(2) $(3-2i)-(4+i)$

(3) $3i+(2+4i)$

(4) $5-(1+2i)$

풀이 (1) $(5+4i)+(3-i)=(5+3)+(4-1)i=8+3i$

(2) $(3-2i)-(4+i)=(3-4)+(-2-1)i=-1-3i$

(3) $3i+(2+4i)=(0+2)+(3+4)i=2+7i$

(4) $5-(1+2i)=(5-1)+(0-2)i=4-2i$

답 (1) $8+3i$ (2) $-1-3i$ (3) $2+7i$ (4) $4-2i$

문제 4 다음을 계산하여라.

(1) $(3-4i)+(5+3i)$

(2) $(1+i)-(4-i)$

(3) $(1-7i)+6$

(4) $(-3+i)-10i$

문제 5 세 복소수 z_1, z_2, z_3이 각각 다음과 같을 때, 물음에 답하여라.

$$z_1=2+3i,\quad z_2=3-2i,\quad z_3=1+i$$

(1) z_1+z_2와 z_2+z_1을 구하고, 그 값을 비교하여라.

(2) $(z_1+z_2)+z_3$과 $z_1+(z_2+z_3)$을 구하고, 그 값을 비교하여라.

근호를 포함한 식의 곱셈에서는 다음과 같이 근호가 있는 수를 하나의 문자로 생각하여 계산하였다.

$$\begin{aligned}(4+3\sqrt{2})(2+\sqrt{2})&=8+4\sqrt{2}+6\sqrt{2}+3(\sqrt{2})^2\\&=(8+6)+(4+6)\sqrt{2}=14+10\sqrt{2}\end{aligned}$$

복소수의 곱셈도 허수단위 i를 하나의 문자로 생각하고 $i^2=-1$임을 이용하여 계산한다. 즉, a, b, c, d가 실수일 때

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di)&=ac+adi+bci+bdi^2\\&=(ac-bd)+(ad+bc)i\end{aligned}$$

이다. 예를 들면

$$\begin{aligned}(4+3i)(2+i)&=8+4i+6i+3i^2\\&=(8-3)+(4+6)i=5+10i\end{aligned}$$

와 같이 계산한다.

한편 근호를 포함한 식의 나눗셈에서는 다음과 같이 분모를 유리화하여 계산하였다.

$$\begin{aligned}\frac{4+3\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}&=\frac{(4+3\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=\frac{8-4\sqrt{2}+6\sqrt{2}-6}{2^2-(\sqrt{2})^2}\\&=\frac{(8-6)+(-4+6)\sqrt{2}}{2}=\frac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}\end{aligned}$$

- 켤레복소수를 분모, 분자에 곱하는 것은 무리수에서 분모를 유리화하는 것과 같은 원리이다.
- $(c+di)(c-di)$
  $=c^2-(di)^2$
  $=c^2+d^2$

복소수의 나눗셈도 분모의 켤레복소수를 분모, 분자에 곱하여 분모를 실수로 만들어 계산한다. 즉, a, b, c, d가 실수이고 $c+di\neq0$일 때

$$\begin{aligned}\frac{a+bi}{c+di}&=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-(di)^2}\\&=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\end{aligned}$$

이다. 예를 들면

$$\begin{aligned}\frac{4+3i}{2+i}&=\frac{(4+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{8-4i+6i-3i^2}{2^2-i^2}\\&=\frac{(8+3)+(-4+6)i}{4+1}=\frac{11}{5}+\frac{2}{5}i\end{aligned}$$

와 같이 계산한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

복소수의 곱셈과 나눗셈

a, b, c, d가 실수일 때

(1) $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

(2) $\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$ (단, $c+di\neq0$)

예제 03

다음을 계산하여라.

(1) $(4+i)(-1+2i)$ (2) $-i(3+2i)$

(3) $\dfrac{1-2i}{2+i}$ (4) $\dfrac{5+i}{2i}$

풀이 (1) $(4+i)(-1+2i)=-4+8i-i+2i^2=-4+7i-2=-6+7i$

(2) $-i(3+2i)=-3i-2i^2=2-3i$

(3) $\dfrac{1-2i}{2+i}=\dfrac{(1-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{2-i-4i+2i^2}{2^2-i^2}=\dfrac{2-5i-2}{4-(-1)}=\dfrac{-5i}{5}=-i$

(4) $\dfrac{5+i}{2i}=\dfrac{(5+i)i}{2i\cdot i}=\dfrac{5i+i^2}{2i^2}=\dfrac{-1+5i}{-2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}i$

답 (1) $-6+7i$ (2) $2-3i$ (3) $-i$ (4) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}i$

문제 6 다음을 계산하여라.

(1) $(3+2i)(1-2i)$ (2) $(1+i)^2$

(3) $\dfrac{1-i}{1+i}$ (4) $\dfrac{2}{3+2i}$

문제 7 세 복소수 z_1, z_2, z_3이 각각 다음과 같을 때, 물음에 답하여라.

$$z_1=2-i,\quad z_2=2+i,\quad z_3=3+5i$$

(1) z_1z_2와 z_2z_1을 구하고, 그 값을 비교하여라.

(2) $(z_1z_2)z_3$과 $z_1(z_2z_3)$을 구하고, 그 값을 비교하여라.

(3) $z_1(z_2+z_3)$과 $z_1z_2+z_1z_3$을 구하고, 그 값을 비교하여라.

사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)의 켤레복소수를 $\overline{z}$라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자. (단, $a\neq0$, $b\neq0$)

(1) $z+\overline{z}$, $z-\overline{z}$, $z\overline{z}$를 구하고, 그 특징을 말하여 보자.

(2) $\dfrac{\overline{z}}{z}$, $\dfrac{z}{\overline{z}}$를 구하고, 그 값을 비교하여 보자.

음수의 제곱근을 어떻게 나타내는가?

탐구 활동 **다음 물음에 답하여 보자.**

1. 제곱하여 -3이 되는 수가 실수인지 아닌지 말하여 보자.

2. $\sqrt{3}i$와 $-\sqrt{3}i$를 제곱하여 보자.

중③ a가 음이 아닌 실수일 때, 제곱하여 a가 되는 수를 a의 제곱근이라고 한다.

음수의 제곱근에 대하여 알아보자.

$a>0$일 때, $-a$의 제곱근은 방정식

$$x^2=-a$$

의 근이다. 그런데

$$(\sqrt{a}i)^2=ai^2=-a,\ (-\sqrt{a}i)^2=ai^2=-a$$

이므로 $-a$의 제곱근은 $\sqrt{a}i$와 $-\sqrt{a}i$이다. 여기에서

$$\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$$

로 나타내기로 한다.

즉, 음수의 제곱근은 복소수로 바꾸어 계산한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

$\sqrt{a}i$, $-\sqrt{a}i$를 $\pm\sqrt{a}i$로 나타낼 수 있다.

음수의 제곱근

$a>0$일 때

(1) $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$

(2) $-a$의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}i$이다.

보기 (1) $\sqrt{-5}=\sqrt{5}i$

(2) -7의 제곱근은 $\pm\sqrt{7}i$이다.

문제 8 다음 수의 제곱근을 구하여라.

(1) -2 (2) -4

(3) $-\dfrac{1}{16}$ (4) $-\dfrac{3}{4}$

예제 04 다음을 계산하여 $a+bi$ (a, b는 실수)의 꼴로 나타내어라.

(1) $\sqrt{-12}-\sqrt{-3}$　　(2) $\sqrt{-2}\sqrt{-3}$　　(3) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}$

풀이 (1) $\sqrt{-12}-\sqrt{-3}=\sqrt{12}i-\sqrt{3}i=2\sqrt{3}i-\sqrt{3}i=\sqrt{3}i$

(2) $\sqrt{-2}\sqrt{-3}=(\sqrt{2}i)(\sqrt{3}i)=\sqrt{6}i^2=-\sqrt{6}$

(3) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}i}=\dfrac{\sqrt{3}i}{\sqrt{2}i\cdot i}=\dfrac{\sqrt{3}i}{\sqrt{2}i^2}=\dfrac{\sqrt{3}i}{-\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}i$

(2) $\sqrt{-2}\sqrt{-3}$을 $\sqrt{(-2)(-3)}$과 같이 계산하지 않도록 주의한다.

답 (1) $\sqrt{3}i$ (2) $-\sqrt{6}$ (3) $-\dfrac{\sqrt{6}}{2}i$

문제 9 다음을 계산하여 $a+bi$ (a, b는 실수)의 꼴로 나타내어라.

(1) $\sqrt{-2}+\sqrt{-8}$　　(2) $\sqrt{-3}\sqrt{-6}$

(3) $\dfrac{\sqrt{-6}}{\sqrt{-2}}$　　(4) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}$

창의 up

다음이 성립함을 설명하여라.

(1) $a<0$, $b<0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이다.

(2) $a<0$, $b>0$이면 $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\dfrac{b}{a}}$이다.

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

수학의 역사에서 수가 확장되어 온 과정을 조사하여라.



02

이차방정식의 실근과 허근

● 이차방정식의 실근과 허근의 뜻을 안다.

실근과 허근이란 무엇인가?

생각 열기

황금비

황금분할이란 한 선분을 두 부분으로 나눌 때, 전체에 대한 긴 부분의 비와 긴 부분에 대한 짧은 부분의 비가 같도록 나눈 것을 말한다. 이때 이 비를 황금비라고 하며 약 $1:1.618$이다. 고대 이집트의 쿠푸 왕의 피라미드, 컴퓨터 화면 등에서 황금비를 찾아볼 수 있다.





탐구 활동

다음 그림과 같이 세 점 A, B, C에 대하여 $\overline{AB}=x$, $\overline{BC}=1$이라고 할 때, 물음에 답하여 보자.



1. $\overline{AC}:\overline{AB}=\overline{AB}:\overline{BC}$이면 $\overline{AB}:\overline{BC}$는 황금비이다. 이때 x에 대한 방정식을 세우고, 그 해를 구하여 보자.
2. $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{AC}:\overline{BC}$라고 할 때, x에 대한 방정식을 세워 보자. 이 방정식의 해를 실수의 범위에서 구할 수 있는지 말하여 보자.

중학교에서는 이차방정식의 근을 실수의 범위에서만 다루었다. 지금부터는 복소수의 범위까지 확장하여 이차방정식의 근을 다루기로 한다.

이를테면 모든 실수 x에 대하여 $x^2+1>0$이므로 이차방정식 $x^2+1=0$은 실수의 범위에서는 근을 가지지 않는다. 그러나 $i^2=(-i)^2=-1$이므로 복소수의 범위에서는 $x=\pm i$인 근을 가진다.

계수 a, b, c가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$의 근의 공식은

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

이다. 위의 이차방정식의 근의 공식에서

$b^2-4ac\geq0$이면 $\sqrt{b^2-4ac}$는 실수

$b^2-4ac<0$이면 $\sqrt{b^2-4ac}$는 허수

이다.

따라서 계수가 실수인 이차방정식은 복소수의 범위에서 반드시 근을 가진다는 것을 알 수 있다.

이때 실수인 근을 **실근**이라 하고, 허수인 근을 **허근**이라고 한다.

특별한 언급이 없는 한 이차방정식의 계수는 실수이고, 방정식의 해는 복소수의 범위에서 구한다.

예제 01 근의 공식을 이용하여 다음 이차방정식을 풀고, 실근인지 허근인지 말하여라.

(1) $x^2+x-5=0$　　(2) $x^2-2x+3=0$

풀이 (1) $a=1$, $b=1$, $c=-5$를 근의 공식에 대입하면

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-5)}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}\ (\text{실근})$$

(2) $a=1$, $b=-2$, $c=3$을 근의 공식에 대입하면

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}=\frac{2\pm\sqrt{-8}}{2}$$

$$=\frac{2\pm2\sqrt{2}i}{2}=1\pm\sqrt{2}i\ (\text{허근})$$

답 (1) $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$ (실근)　(2) $x=1\pm\sqrt{2}i$ (허근)

문제 1 근의 공식을 이용하여 다음 이차방정식을 풀고, 실근인지 허근인지 말하여라.

(1) $x^2-6x-1=0$　　(2) $2x^2-3x+5=0$

사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

일차항의 계수가 짝수인 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$ $(a\neq0)$의 근을 간단히 나타내어 보자.

03 판별식

● 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다.

이차방정식에서 판별식이란 무엇인가?

생각 열기

당도 측정기

당도 측정기는 과일의 당도를 측정하는 기계로, 과일에 빛을 비추었을 때 반사되어 나오는 빛을 이용하여 당도를 측정한다. 당도 측정기를 사용하면 과일을 직접 먹어 보지 않고도 추수하기에 적합한 시기를 알 수 있으며, 맛있는 과일을 살 수 있다. 당도 측정기와 같이 이차방정식의 근을 직접 구하지 않고도 근이 실근인지 허근인지 알 수 있는 방법이 있다.



탐구 활동

세 이차방정식 $x^2-2x-2=0$, $x^2-2x+1=0$, $x^2-2x+2=0$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 근의 공식을 이용하여 세 이차방정식의 근을 각각 구하여 보자.
2. 세 이차방정식을 서로 다른 두 실근, 중근, 서로 다른 두 허근을 가지는 경우로 나누어 보자.

이차방정식의 근을 직접 구하지 않고, 근이 실근인지 허근인지를 판별하는 방법에 대하여 알아보자.

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$의 근은

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

이므로 근이 실근인지 허근인지는 근호 안에 있는 b^2-4ac의 부호에 의하여 결정된다. 즉,

(i) $b^2-4ac>0$이면 서로 다른 두 실근

(ii) $b^2-4ac=0$이면 중근 (실근)

(iii) $b^2-4ac<0$이면 서로 다른 두 허근

을 가진다.

이와 같이 b^2-4ac의 부호에 따라 주어진 이차방정식의 근을 판별할 수 있으므로 b^2-4ac를 이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$의 **판별식**이라 하고, 보통 기호 D로 나타낸다. 즉, $D=b^2-4ac$이다.

● 기호 D는 판별식을 뜻하는 영어 Discriminant의 첫 글자를 따온 것이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

이차방정식의 근의 판별

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$의 판별식 $D=b^2-4ac$에 대하여

(1) $D>0$이면 서로 다른 두 실근을 가진다. 또 서로 다른 두 실근을 가지면 $D>0$이다.

(2) $D=0$이면 중근(실근)을 가진다. 또 중근을 가지면 $D=0$이다.

(3) $D<0$이면 서로 다른 두 허근을 가진다. 또 서로 다른 두 허근을 가지면 $D<0$이다.

● $D\geq0$이면 실근을 가진다. 또 실근을 가지면 $D\geq0$이다.

참고 일차항의 계수가 짝수인 경우 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0\ (a\neq0)$의 근은

$$\frac{D}{4}=b'^2-ac$$

를 이용하여 판별할 수 있다.

예제 01 다음 이차방정식의 근을 판별하여라.

(1) $x^2-5x-2=0$ (2) $x^2-4x+4=0$ (3) $2x^2+x+3=0$

풀이 (1) $D=(-5)^2-4\cdot1\cdot(-2)=33>0$

따라서 $x^2-5x-2=0$은 서로 다른 두 실근을 가진다.

(2) $D=(-4)^2-4\cdot1\cdot4=0$

따라서 $x^2-4x+4=0$은 중근을 가진다.

(3) $D=1^2-4\cdot2\cdot3=-23<0$

따라서 $2x^2+x+3=0$은 서로 다른 두 허근을 가진다.

답 (1) 서로 다른 두 실근 (2) 중근 (3) 서로 다른 두 허근

다른 풀이 (2) $x^2+2\cdot(-2)x+4=0$에서

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot4=4-4=0$$

따라서 $x^2-4x+4=0$은 중근을 가진다.

문제 1 다음 이차방정식의 근을 판별하여라.

(1) $3x^2-2x+2=0$ (2) $6x^2+x-2=0$ (3) $x^2+2\sqrt{2}x+2=0$

예제 02 이차방정식 $x^2-kx+2k=0$이 중근을 가지도록 하는 실수 k의 값을 구하고, 이때의 중근을 구하여라.

풀이 주어진 이차방정식이 중근을 가지려면 판별식 $D=0$이어야 하므로

$$D=(-k)^2-4\cdot1\cdot(2k)=k^2-8k=k(k-8)=0$$

따라서 $k=0$ 또는 $k=8$이다.

(i) $k=0$일 때, 방정식은 $x^2=0$이므로 중근은 $x=0$

(ii) $k=8$일 때, 방정식은 $x^2-8x+16=0$, $(x-4)^2=0$이므로 중근은 $x=4$

답 $k=0$일 때 $x=0$, $k=8$일 때 $x=4$의 중근을 가진다.

문제 2 이차방정식 $x^2-(2k-1)x+k^2=0$이 다음과 같은 근을 가질 때, 실수 k의 값 또는 그 범위를 구하여라.

(1) 서로 다른 두 실근

(2) 중근

(3) 서로 다른 두 허근

발전

문제 3 두 이차방정식 $x^2+x+a=0$, $2x^2-2\sqrt{2}ax+(a+1)^2=0$ 중에서 적어도 하나가 허근을 가질 때, 실수 a값의 범위를 구하여라.

사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$에서 a와 c의 부호가 서로 다르면 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 가짐을 판별식을 이용하여 설명하여 보자.

04

근과 계수의 관계

● 이차방정식에서 근과 계수의 관계를 이해한다.

이차방정식에서 근과 계수는 어떤 관계가 있는가?

생각 열기



탐구 활동

이차방정식 $2x^2-9x-5=0$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 이차방정식의 근을 구하여 보자.

2. 두 근의 합과 곱을 구하여 보자.

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$의 두 근 α, β를

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

라고 하면 α와 β의 합과 곱은 다음과 같다.

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac}\,)^2}{4a^2}$$

$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

근과 계수의 관계를 이용하면 근을 직접 구하지 않고도 두 근의 합과 곱을 구할 수 있다.

이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$의 두 근을 α, β라고 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

보기 이차방정식 $x^2-3x+2=0$의 두 근을 α, β라고 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{-3}{1}=3,\ \alpha\beta=\frac{2}{1}=2$$

문제 1 다음 이차방정식의 두 근의 합과 곱을 구하여라.

(1) $x^2-3x-4=0$

(2) $2x^2-6x+1=0$

예제 01 이차방정식 $x^2+2x-4=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\alpha^2+\beta^2$

(2) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

풀이 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-4$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2\cdot(-4)=12$

(2) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$

답 (1) 12 (2) $\frac{1}{2}$

문제 2 이차방정식 $x^2-4x+5=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $(\alpha+1)(\beta+1)$

(2) $(\alpha-\beta)^2$

(3) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$

(4) $\alpha^3+\beta^3$

발전

문제 3 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$의 값을 구하여라.

두 수를 근으로 하는 이차방정식을 어떻게 구하는가?

두 수 α, β를 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식은 다음과 같다.

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

이 식을 전개하여 정리하면

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

두 근의 합

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

두 근의 곱

두 수를 근으로 하는 이차방정식

두 수 α, β를 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

예제 02 두 수 $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$를 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하여라.

풀이 $\alpha=1+\sqrt{2}$, $\beta=1-\sqrt{2}$라고 하면

$$\alpha+\beta=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2,\ \alpha\beta=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-1$$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-2x-1=0$이다.

답 $x^2-2x-1=0$

문제 4 다음 두 수를 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하여라.

(1) $2,\ -1$

(2) $1+i,\ 1-i$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$의 두 근을 α, β라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

이다. 따라서 이차식 ax^2+bx+c는 다음과 같이 인수분해된다.

$$\begin{aligned}ax^2+bx+c&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\&=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}\\&=a(x-\alpha)(x-\beta)\end{aligned}$$

여기에서 계수가 실수인 모든 이차방정식은 복소수의 범위에서 인수분해됨을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

이차식의 인수분해

이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$의 두 근을 α, β라고 하면

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

예제 03 다음 이차식을 복소수의 범위에서 인수분해하여라.

(1) x^2-2　　(2) x^2-2x+4

풀이 (1) 이차방정식 $x^2-2=0$을 풀면 $x=\pm\sqrt{2}$이므로

$$x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$$

(2) 이차방정식 $x^2-2x+4=0$을 풀면 $x=1\pm\sqrt{3}i$이므로

$$x^2-2x+4=\{x-(1+\sqrt{3}i)\}\{x-(1-\sqrt{3}i)\}$$
$$=(x-1-\sqrt{3}i)(x-1+\sqrt{3}i)$$

답 (1) $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$　(2) $(x-1-\sqrt{3}i)(x-1+\sqrt{3}i)$

문제 5 다음 이차식을 복소수의 범위에서 인수분해하여라.

(1) x^2-5　　(2) x^2+6x+3

(3) x^2+9　　(4) x^2-4x+6

사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

서로 다른 두 실근을 가지는 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 두 근의 부호가 다음과 같을 때, 실수 p, q의 부호를 말하고 그 이유를 설명하여 보자.

(1) 모두 양수　　(2) 모두 음수　　(3) 서로 다른 부호

중단원 기초

1 다음 복소수 중에서 실수, 허수를 각각 찾아라.

i^2, $-\sqrt{-9}$, $-4+\sqrt{3}i$, $\sqrt{(-5)^2}$

01 복소수
복소수의 분류

2 다음을 계산하여라.

(1) $(3+i)+(1-2i)$

(2) $(5-i)-(-1+6i)$

(3) $(3-2i)(4-i)$

(4) $\dfrac{2+i}{3+2i}$

01 복소수
복소수의 사칙계산

3 다음 이차방정식을 풀고, 실근인지 허근인지 말하여라.

(1) $x^2+x-6=0$

(2) $3x^2+x+1=0$

02 이차방정식의 실근과 허근

4 다음 이차방정식의 근을 판별하여라.

(1) $x^2+2x-2=0$

(2) $x^2+x+1=0$

(3) $\dfrac{1}{2}x^2+3x+\dfrac{5}{2}=0$

(4) $x^2+2\sqrt{3}x+3=0$

03 판별식

5 다음 이차방정식의 두 근의 합과 곱을 구하여라.

(1) $x^2+2x-1=0$

(2) $x^2-4x+2=0$

(3) $3x^2+x-1=0$

(4) $-2x^2+x+1=0$

04 근과 계수의 관계

[해답 p.220]

중단원 기본

수준별 학습

1 $i+i^2+i^3+\cdots+i^{100}$을 간단히 하여라.

01 복소수
복소수의 사칙계산

2 다음을 계산하여 $a+bi$ (a, b는 실수)의 꼴로 나타내어라.

(1) $5\sqrt{-3}+3\sqrt{-12}$

(2) $\dfrac{\sqrt{-8}-2}{\sqrt{-2}}$

01 복소수
음수의 제곱근

3 다음 이차방정식을 풀고, 실근인지 허근인지 말하여라.

(1) $2x^2+9x-5=0$

(2) $x^2+7x-9=0$

(3) $0.2x^2-0.4x+0.3=0$

(4) $x^2-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{9}=0$

02 이차방정식의 실근과 허근

4 이차방정식 $x^2+2(k-3)x+k^2=0$이 다음과 같은 근을 가질 때, 실수 k의 값 또는 그 범위를 구하여라.

(1) 서로 다른 두 실근

(2) 중근

(3) 서로 다른 두 허근

03 판별식

5 이차방정식 $x^2+2x+4=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\alpha^2+\beta^2$

(2) $\alpha^3+\beta^3$

(3) $(\alpha-\beta)^2$

(4) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$

04 근과 계수의 관계

[해답 p.220]

중단원 실력

수준별 학습

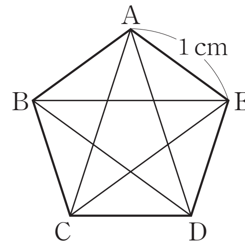
1 x가 실수일 때, $z=(1+i)x^2+(4-i)x+(3-2i)$가 실수가 되도록 하는 x의 값과 그때의 z의 값을 구하여라.

01 복소수

2 $(1-i)\overline{z}+2iz=3-i$를 만족시키는 복소수 z를 구하여라. (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

01 복소수
복소수의 사칙계산

3 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 $1\,\text{cm}$인 정오각형의 대각선의 길이를 구하여라.



02 이차방정식의 실근과 허근

4 x에 대한 이차방정식 $x^2-2(k+a)x+(k^2-k+b)=0$이 실수 k의 값에 관계없이 중근을 가질 때, 실수 a, b의 값을 구하여라.

03 판별식

5 이차방정식 $x^2-mx+m+2=0$의 서로 다른 두 근이 모두 정수가 되도록 하는 실수 m의 값을 모두 구하여라.

04 근과 계수의 관계

2

이차방정식과 이차함수

한계를 뛰어넘다.

패럴림픽(Paralympics), 즉 국제 장애인 올림픽은 1960년 로마 하계 장애인 올림픽, 1976년 외른셸스비크 동계 장애인 올림픽을 시작으로 현재는 올림픽 개최국에서 동반 개최되고 있다. 2012년 제14회 런던 하계 장애인 올림픽에서는 165개국에서 4250여 명의 선수가 참가하였으며, 양궁, 육상, 사격, 좌식 배구, 휠체어 농구 등 20개 종목의 경기가 열렸다.









단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 92쪽

휠체어 농구 경기에서 농구공의 높이를 식으로 표현할 수 있을까?

01 이차함수와 이차방정식의 관계

● 이차함수와 이차방정식의 관계를 이해한다.

이차함수와 이차방정식은 어떤 관계가 있는가?

생각 열기

물 로켓

물 로켓은 공기의 압력을 이용하여 플라스틱 용기에 든 물을 뒤로 뿜어 생기는 추진력으로 용기를 멀리 날리는 장치이다. 비스듬히 발사된 물 로켓은 포물선을 그리며 날아간다.



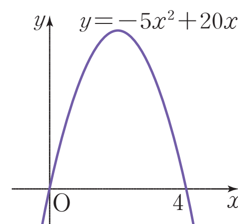
탐구 활동

어느 물 로켓이 지면에서 발사된 지점으로부터 수평 거리로 x m를 지날 때의 높이를 y m라고 하면 $y=-5x^2+20x$의 관계가 성립한다고 하자. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 물 로켓이 지면에 다시 떨어질 때 물 로켓의 높이는 몇 m인가?
2. 물 로켓이 발사된 지점에서 떨어진 지점까지의 수평 거리 x m를 구하려면 어떤 방정식을 풀어야 하는가?

이차함수 $y=-5x^2+20x$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 $y=-5x^2+20x$에 $y=0$을 대입하여 구할 수 있다.

따라서 교점의 x좌표는 이차방정식 $-5x^2+20x=0$, 즉 $-5x(x-4)=0$의 실근과 같으므로 0, 4이다.



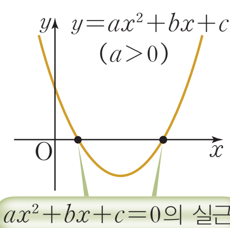
일반적으로 이차함수

$$y=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$$

의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식

$$ax^2+bx+c=0$$

의 실근과 같다.



따라서 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 개수는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근의 개수와 같다. 그러므로 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 $D=b^2-4ac$라고 할 때, 이차함수의 그래프와 이차방정식의 해 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

이차함수의 그래프와 이차방정식의 해

판별식의 부호	$D>0$	$D=0$	$D<0$
이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계	서로 다른 두 점에서 만난다.	한 점에서 만난다(접한다).	만나지 않는다.
이차함수 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$의 그래프	α β x	$\alpha=\beta$ x	x
이차함수 $y=ax^2+bx+c$ $(a<0)$의 그래프	α β x	$\alpha=\beta$ x	x
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$의 해	$x=\alpha$ 또는 $x=\beta$ (서로 다른 두 실근)	$x=\alpha$(중근)	서로 다른 두 허근

예제 01 다음 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계를 말하여라.

(1) $y=x^2-2x-3$ (2) $y=x^2-2x+1$ (3) $y=x^2+x+1$

풀이 (1) 이차방정식 $x^2-2x-3=0$의 판별식 $D=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-3)=16>0$이므로 이차함수 $y=x^2-2x-3$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 이차방정식 $x^2-2x+1=0$의 판별식 $D=(-2)^2-4\cdot1\cdot1=0$이므로 이차함수 $y=x^2-2x+1$의 그래프는 x축과 한 점에서 만난다(접한다).

(3) 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 판별식 $D=1^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$이므로 이차함수 $y=x^2+x+1$의 그래프는 x축과 만나지 않는다.

답 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) 한 점에서 만난다(접한다).
(3) 만나지 않는다.

문제 1 다음 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계를 말하여라.

(1) $y=x^2+4x-1$　　(2) $y=2x^2-4x+2$

(3) $y=-2x^2+2x-1$　　(4) $y=-x^2-3x+1$

문제 2 이차함수 $y=x^2-x+k$의 그래프와 x축의 위치 관계가 다음과 같을 때, 실수 k의 값 또는 그 범위를 구하여라.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 한 점에서 만난다.

(3) 만나지 않는다.

예제 02

이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프와 x축이 $x=1$에서 접할 때, 다음을 구하여라.

(1) 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 해

(2) 실수 a, b의 값

풀이 (1) 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프와 x축이 $x=1$에서 접하므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 해는 $x=1$(중근)이다.

(2) 1을 중근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $(x-1)^2=0$, 즉 $x^2-2x+1=0$이므로 $x^2+ax+b=x^2-2x+1$에서　$a=-2$, $b=1$

답　(1) $x=1$(중근)　(2) $a=-2$, $b=1$

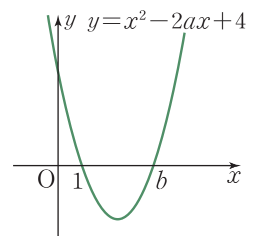
문제 3 이차함수 $y=x^2-2ax+b$의 그래프가 x축과 두 점 $(-1,\ 0)$, $(2,\ 0)$에서 만날 때, 다음을 구하여라.

(1) 이차방정식 $x^2-2ax+b=0$의 해

(2) 실수 a, b의 값

발전

문제 4 이차함수 $y=x^2-2ax+4$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 실수 a, b의 값을 구하여라.



02 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

● 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다.

이차함수의 그래프와 직선은 어떤 위치 관계에 있는가?

생각 열기

레이저 광선

레이저 광선은 일반적인 빛에 비하여 퍼지지 않고 직선처럼 곧바로 진행하는 빛으로, 단위 넓이당 에너지가 커서 먼 거리 통신이나 의료 기기 등에서 이용되고 있다.

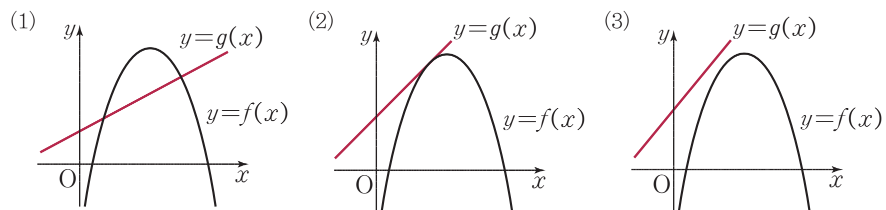
한편 포물선을 따라 움직이는 물체를 레이저 광선을 쏘아서 맞히려면 포물선을 나타내는 이차함수의 그래프와 레이저 광선을 나타내는 직선이 서로 만나야 한다.



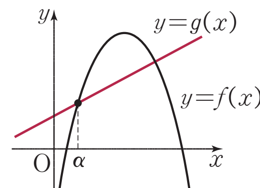
탐구 활동

포물선 모양을 따라 움직이는 물체와 레이저 광선의 경로를 좌표평면 위에 나타내면 각각 함수 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a<0)$와 함수 $g(x)=mx+n$의 그래프와 같다고 하자. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 두 함수 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a<0)$와 $g(x)=mx+n$의 그래프가 다음과 같을 때, 물체와 레이저 광선이 만나는 횟수를 구하여 보자.



2. 다음 그림과 같이 물체와 레이저 광선이 만났을 때의 물체의 x좌표를 α라고 할 때, α는 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근임을 설명하여 보자.



이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계에 대하여 알아보자.

두 그래프의 교점과 방정식의 실근
두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근이다.

이차함수 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 x좌표는 $y=ax^2+bx+c$에 $y=mx+n$을 대입하여 얻은 이차방정식

$$ax^2+bx+c=mx+n, \text{ 즉}$$

$$ax^2+(b-m)x+c-n=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

의 실근과 같다.

따라서 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 개수는 이차방정식 ①의 실근의 개수와 같다.

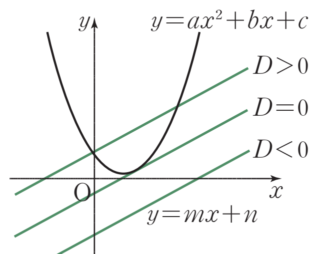
그러므로 이차방정식 ①의 판별식

$$D=(b-m)^2-4a(c-n)$$

의 부호에 따라 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계는 다음과 같음을 알 수 있다.

(i) $D>0$인 경우

방정식 ①은 서로 다른 두 실근을 가지므로 서로 다른 두 점에서 만난다.



(ii) $D=0$인 경우

방정식 ①은 중근(실근)을 가지므로 한 점에서 만난다(접한다).

(iii) $D<0$인 경우

방정식 ①은 실근을 가지지 않으므로 만나지 않는다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

이차함수 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계는 이차방정식 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$의 판별식을 D라고 할 때

(1) $D>0$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.
  또 서로 다른 두 점에서 만나면 $D>0$이다.
(2) $D=0$이면 한 점에서 만난다(접한다).
  또 한 점에서 만나면(접하면) $D=0$이다.
(3) $D<0$이면 만나지 않는다.
  또 만나지 않으면 $D<0$이다.

보기 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 직선 $y=x+1$은 $y=x^2$에 $y=x+1$을 대입하여 얻은 이차방정식 $x^2-x-1=0$의 판별식이

$$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-1)=5>0$$

이므로 서로 다른 두 점에서 만난다.

문제 1 다음 이차함수의 그래프와 직선 $y=2x$의 교점의 개수를 구하여라.

(1) $y=-x^2+6x-4$　　(2) $y=x^2+3x+1$

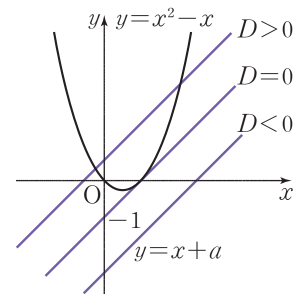
예제 01

이차함수 $y=x^2-x$의 그래프와 직선 $y=x+a$의 위치 관계가 다음과 같을 때, 실수 a의 값 또는 그 범위를 구하여라.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 한 점에서 만난다.

(3) 만나지 않는다.



풀이 $y=x^2-x$에 $y=x+a$를 대입하여 정리하면

$$x^2-2x-a=0 \quad \cdots\cdots ①$$

이차방정식 ①의 판별식을 D라고 하면

$$D=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-a)=4+4a$$

(1) 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D=4+4a>0$이어야 하므로　$a>-1$

(2) 한 점에서 만나려면 $D=4+4a=0$이어야 하므로　$a=-1$

(3) 만나지 않으려면 $D=4+4a<0$이어야 하므로　$a<-1$

답 (1) $a>-1$　(2) $a=-1$　(3) $a<-1$

문제 2 이차함수 $y=-x^2+x+1$의 그래프와 직선 $y=2x+a$의 위치 관계가 다음과 같을 때, 실수 a의 값 또는 그 범위를 구하여라.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 한 점에서 만난다.

(3) 만나지 않는다.

발전 **문제 3** 직선 $y=2x+1$과 평행하고 이차함수 $y=x^2-2x+1$의 그래프와 접하는 직선의 방정식을 구하여라.

03

이차함수의 최대, 최소

● 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

이차함수의 최댓값과 최솟값을 어떻게 구하는가?

생각 열기

백두산과 화산 폭발

백두산은 한반도에서 가장 높은 산으로 높이는 2750 m이다. 백두산의 천지를 만든 대규모 화산 폭발은 지금으로부터 약 1000년 전인 고려 시대 초기에 일어난 것으로 알려져 있다.

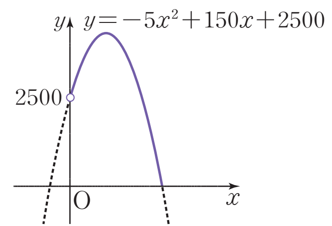


탐구 활동

지면으로부터 높이가 2500 m인 지점에서 어느 화산이 폭발하여 초속 150 m의 속력으로 용암을 분출하였을 때, 분출물의 x초 후의 높이를 y m라고 하면

$$y=-5x^2+150x+2500\ (x>0)$$

의 관계가 성립한다고 하자. 다음 물음에 답하여 보자.



1. 이차함수 $y=-5x^2+150x+2500$을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 나타내어 보자.

2. 분출물이 최대로 높이 올라갔을 때의 높이와 그 높이까지 올라가는 데 걸린 시간을 구하여 보자.

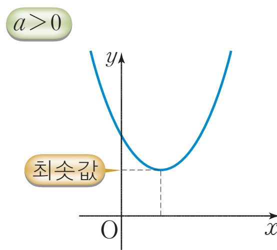
● x값의 범위가 실수 전체일 때, 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$의 최댓값, 최솟값을 구하려면 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 변형하여 꼭짓점을 구한다.

x값의 범위가 실수 전체일 때, 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$는

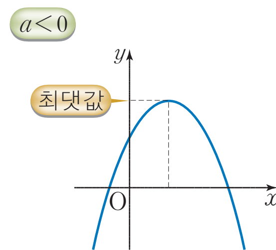
$a>0$인 경우 꼭짓점에서 최솟값을 가지고, 최댓값은 없다.

$a<0$인 경우 꼭짓점에서 최댓값을 가지고, 최솟값은 없다.

$a>0$



$a<0$

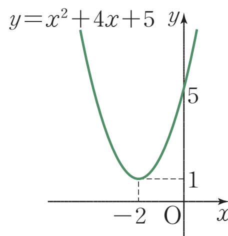


예제 01 이차함수 $y=x^2+4x+5$의 최댓값 또는 최솟값을 구하여라.

풀이 $y=x^2+4x+5=(x^2+4x+4)+1=(x+2)^2+1$

이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 이 함수의 최솟값은 $x=-2$일 때 1이고, 최댓값은 없다.



답 최솟값은 1이고, 최댓값은 없다.

문제 1 다음 이차함수의 최댓값 또는 최솟값을 구하여라.

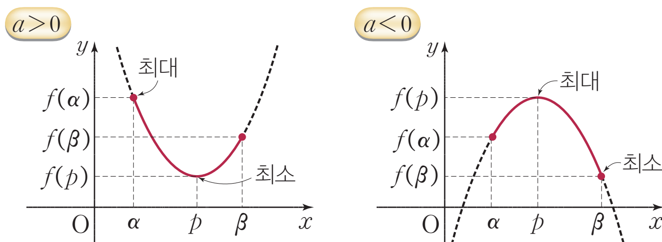
(1) $y=-x^2-4x+1$　　(2) $y=2x^2-6x+4$

이제 x값의 범위가 제한되어 있을 때, 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하여 보자.

x값의 범위가 $\alpha\le x\le\beta$일 때, 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q\ (a\neq0)$에서

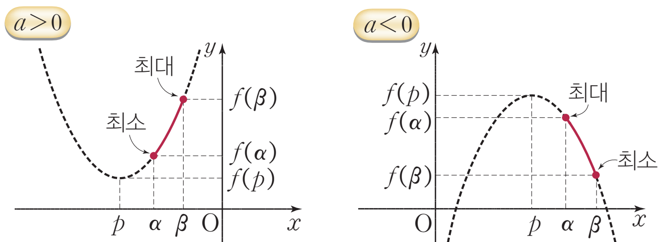
(i) 꼭짓점의 x좌표 $x=p$가 x값의 범위에 포함될 경우

$f(\alpha), f(\beta), f(p)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값이고, 가장 작은 값이 최솟값이다.



(ii) 꼭짓점의 x좌표 $x=p$가 x값의 범위에 포함되지 않을 경우

$f(\alpha), f(\beta)$ 중에서 큰 값이 최댓값이고, 작은 값이 최솟값이다.



예제 **02** $-1\le x\le 2$일 때, 이차함수 $y=x^2-2x-1$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

꼭짓점의 x좌표가 $x=1$이므로 x값의 범위 $-1\le x\le 2$에 포함된다.

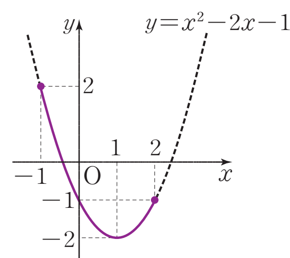
풀이 $y=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$에서 꼭짓점의 x좌표는 $x=1$이고, x값의 범위는 $-1\le x\le 2$이므로

$x=-1$일 때 $y=2$

$x=1$일 때 $y=-2$

$x=2$일 때 $y=-1$

따라서 최댓값은 2이고, 최솟값은 -2이다.



답 최댓값은 2이고, 최솟값은 -2이다.

문제 **2** 주어진 범위에서 다음 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(1) $y=2x^2-4x+1\ (0\le x\le 2)$

(2) $y=-x^2-6x+3\ (1\le x\le 4)$

이차함수의 최댓값과 최솟값을 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

예제 **03** 어느 항공사의 현재 서울−제주 간 노선의 항공료는 6만 원이고 이 노선을 하루 평균 300명의 승객이 이용한다고 한다. 항공료의 가격을 x만 원 올리면 하루 평균 $30x$명의 승객이 감소한다고 할 때, 이 노선의 하루 매출액이 최대가 되도록 하는 항공료를 구하여라. (단, $0\le x\le 10$)

풀이 (항공료)$=6+x$(만 원)

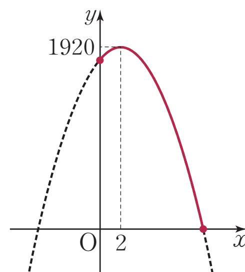
(하루 평균 승객 수)$=300-30x$(명)

이므로 하루 매출액을 y만 원이라고 하면

$y=(6+x)(300-30x)$

$=-30(x-2)^2+1920\ (0\le x\le 10)$

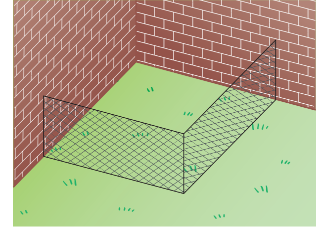
따라서 하루 매출액의 최댓값은 $x=2$일 때 1920만 원이고, 이때 항공료는 8만 원이다.





답 8만 원

문제 3 오른쪽 그림과 같이 직각을 이루는 두 벽면에 길이가 $10\,\mathrm{m}$인 철망을 이용하여 직사각형 모양의 가축우리를 만들려고 한다. 가축우리의 넓이가 최대가 되도록 하는 가로와 세로의 길이를 구하여라. (단, 철망의 두께는 생각하지 않는다.)



문제 4 어떤 농작물 x톤을 팔면 1톤당 $\left(100-\frac{x}{10}\right)$만 원의 이익이 생기고, x톤을 운송하는 데 드는 비용은 $(50+10x)$만 원이라고 한다. 이익금에서 운송비를 뺀 순이익금이 최대가 되도록 하려면 몇 톤을 팔아야 하는지 구하여라. (단, $0<x<1000$)

사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

두 양수 a, b의 합이 일정할 때, 두 수의 곱 ab가 최대가 되려면 a와 b 사이에는 어떤 관계가 성립해야 하는지 설명하여 보자.

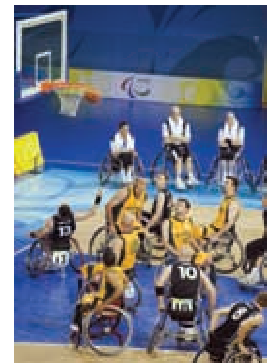
단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

지면에서 수직 방향으로 $a\,\mathrm{m/s}$의 속력으로 던진 농구공의 x초 후의 높이를 $y\,\mathrm{m}$라고 하면

$$y=ax-bx^2\ (a>0,\ b>0)$$

의 관계가 성립한다고 하자. 농구공을 던지는 속력이 2배가 되면 농구공이 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 몇 배가 되는지 구하여라.



중단원 기초

1 다음 이차함수의 그래프가 x축과 만나는지 알아보고, 만나는 경우에는 x축과 만나는 점의 x좌표를 구하여라.

01 이차함수와 이차방정식의 관계

(1) $y=(x+1)(x-2)$　　(2) $y=-x^2-2x+8$

(3) $y=2x^2+4x+2$　　(4) $y=-3x^2+2x-1$

2 이차함수 $y=x^2+ax+1$의 그래프가 x축과 접하도록 하는 실수 a의 값을 모두 구하여라.

01 이차함수와 이차방정식의 관계

3 이차함수 $y=x^2-3x+2$의 그래프와 직선 $y=x+k$의 위치 관계가 다음과 같을 때, 실수 k의 값 또는 그 범위를 구하여라.

02 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 한 점에서 만난다.

(3) 만나지 않는다.

4 다음 이차함수의 최댓값 또는 최솟값을 구하여라.

03 이차함수의 최대, 최소

(1) $y=2x^2-4x+3$　　(2) $y=-x^2+3x-2$

5 $-1\leq x\leq 2$ 일 때, 다음 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

03 이차함수의 최대, 최소

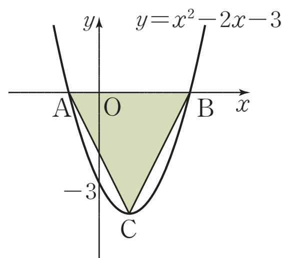
(1) $y=2(x-1)^2+3$　　(2) $y=-(x-3)^2+2$

중단원 기본

1 이차함수 $y=x^2+x+k$의 그래프가 x축과 만나는 두 점을 A, B라고 하자. 선분 AB의 길이가 $\sqrt{5}$일 때, 실수 k의 값을 구하여라.

01 이차함수와 이차방정식의 관계

2 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=x^2-2x-3$의 그래프가 x축과 만나는 두 점을 A, B라 하고, 꼭짓점을 C라고 할 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하여라.



01 이차함수와 이차방정식의 관계

3 직선 $y=x+m$이 이차함수 $y=x^2-x+1$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나고, $y=x^2+x+1$의 그래프와는 만나지 않을 때, 실수 m값의 범위를 구하여라.

02 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

4 이차함수 $y=x^2-4x+a$의 최솟값이 3일 때, 실수 a의 값을 구하여라.

03 이차함수의 최대, 최소

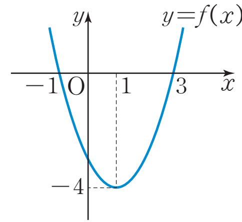
5 이차함수 $y=-x^2+4x+a$ $(1\le x\le 4)$의 최댓값이 2일 때, 다음을 구하여라.

(1) 실수 a의 값　　(2) 최솟값

03 이차함수의 최대, 최소

중단원 실력

1 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 방정식 $f(x+1)=0$의 두 근의 합을 구하여라.

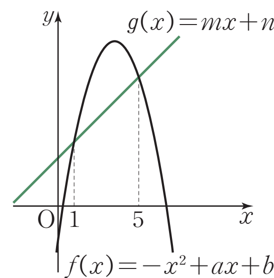


01 이차함수와 이차방정식의 관계

2 점 A는 이차함수 $y=x^2$의 그래프 위에 있고, 점 B는 직선 $y=2x-2$ 위에 있다. 두 점 A, B에 대하여 선분 AB의 길이가 최소일 때, 점 A의 좌표를 구하여라.

02 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

3 두 함수 $f(x)=-x^2+ax+b$, $g(x)=mx+n$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $f(x)-g(x)$의 최댓값을 구하여라.

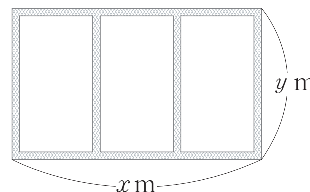


03 이차함수의 최대, 최소

4 $x\geq0$, $y\geq0$이고 $x+y=3$일 때, $2x^2+y^2$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

03 이차함수의 최대, 최소

5 길이가 40 m인 조립식 벽면을 모두 이용하여 오른쪽 그림과 같이 세 개의 직사각형 모양의 방으로 이루어진 건물을 만들려고 한다. 전체 건물의 밑면의 넓이가 최대일 때, x의 값을 구하여라. (단, 벽면의 두께는 생각하지 않는다.)



03 이차함수의 최대, 최소

3

여러 가지 방정식

균형 잡힌 식단 계획하기

청소년기에는 체내에서 새로운 조직이 많이 만들어지고 여러 가지 조절 작용이 활발하게 일어나므로 일생 중에서 가장 많은 영양 섭취가 필요하다.

영양섭취기준이란 성장 시기에 맞게 하루에 먹도록 권장하는 영양소의 양으로, 오른쪽 표는 15~18세의 영양섭취기준의 일부를 나타낸 것이다. 장기적으로 영양섭취기준보다 많이 먹으면 영양 과잉으로 인한 질병이 생길 수 있으며 지속적으로 영양섭취기준 이하로 먹으면 영양 부족으로 인해 청소년기의 성장이 늦춰질 수 있다.

15~18세의 1일 영양섭취기준

	남	여
에너지(kcal)	2700	2000
단백질(g)	55	45
수분(mL)	2600	2100
비타민 A(μg RE)	850	600
비타민 D(μg)	5	5
비타민 E(mg α-TE)	12	10
비타민 C(mg)	110	100
칼슘(mg)	900	800
인(mg)	1000	800
나트륨(g)	1.5	1.5
철(mg)	15	17
아연(mg)	10	9

(에너지는 필요추정량, 수분, 비타민 D, 비타민 E, 나트륨은 충분섭취량, 나머지는 권장섭취량이다.)



단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 106쪽

여러 가지 음식을 먹을 때, 적당한 열량을 얻으려면 어떻게 먹는 것이 좋을까?

01 삼차방정식과 사차방정식

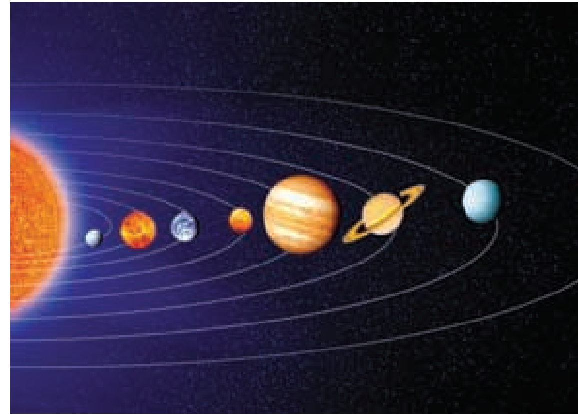
● 간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있다.

삼차방정식과 사차방정식을 어떻게 푸는가?

생각 열기

케플러 제3법칙

케플러 제3법칙은 행성의 공전 주기의 제곱은 태양으로부터 그 행성까지 거리의 세제곱에 비례한다는 법칙이다. 이 법칙으로부터 태양과 행성 사이의 거리를 측정할 수 있게 되었다. 그런데 태양과 행성은 매우 멀리 떨어져 있기 때문에 먼 거리를 나타내는 단위가 필요하다. 태양계 내의 천체의 거리를 나타낼 때에는 주로 천문단위(AU)를 사용하는데 1 AU는 태양과 지구 사이의 거리이다.



탐구 활동

행성의 공전 주기를 T년, 태양과 그 행성 사이의 거리를 R AU라고 하면 케플러 제3법칙에 의하여

$$T^2=aR^3$$

이 성립한다. 다음 물음에 답하여 보자. (단, a는 비례상수이다.)

1. 지구의 공전 주기는 1년이고, 태양과 지구 사이의 거리는 1 AU이다. 이때 a의 값을 구하여 보자.
2. 공전 주기가 64년인 행성이 있다고 하자. 태양과 그 행성 사이의 거리를 x AU라고 할 때, x에 대한 방정식을 만들어 보자.
3. 2에서 만든 방정식을 (x에 대한 다항식)$=0$의 꼴로 나타내고, 이때 좌변은 x에 대한 몇 차식인지 말하여 보자.

● $f(x)$가 x에 대한 삼차식, 사차식일 때, 방정식 $f(x)=0$을 각각 x에 대한 삼차방정식, 사차방정식이라고 한다.

모든 이차방정식은 근의 공식을 이용하여 쉽게 풀 수 있지만, 삼차방정식이나 사차방정식을 푸는 것은 일반적으로 간단하지 않다.

여기에서는 삼차방정식이나 사차방정식 중에서 인수분해 공식이나 인수정리를 이용하여 풀 수 있는 것만 다루기로 한다.

먼저 인수분해 공식을 이용하여 방정식의 근을 구하여 보자.

예제 01 다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^3+1=0$　　(2) $x^3-3x^2+3x-1=0$

풀이 (1) 좌변을 인수분해하면 $(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로

$x+1=0$ 또는 $x^2-x+1=0$

따라서 구하는 근은 $x=-1$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$이다.

(2) 좌변을 인수분해하면 $(x-1)^3=0$이므로　$x-1=0$

따라서 구하는 근은 $x=1$이다.

답 (1) $x=-1$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$　(2) $x=1$

이차방정식 $(x-a)^2=0$의 근 a를 중근 또는 이중근이라 하고, 삼차방정식 $(x-a)^3=0$의 근 a를 삼중근이라고 한다.

문제 1 다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^3+8=0$　　(2) $x^3-64=0$

(3) $x^3+9x^2+27x+27=0$　　(4) $x^3-6x^2+12x-8=0$

예제 02 다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^3-9x=0$　　(2) $x^4-6x^2-16=0$

풀이 (1) 좌변을 공통인수 x로 묶고 인수분해하면　$x(x+3)(x-3)=0$

$x=0$ 또는 $x+3=0$ 또는 $x-3=0$

따라서 구하는 근은 $x=0$ 또는 $x=\pm3$이다.

(2) $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은　$X^2-6X-16=0$, $(X-8)(X+2)=0$

$X=8$ 또는 $X=-2$

$X=x^2$이므로　$x^2=8$ 또는 $x^2=-2$

따라서 구하는 근은 $x=\pm2\sqrt{2}$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}i$이다.

답 (1) $x=0$ 또는 $x=\pm3$　(2) $x=\pm2\sqrt{2}$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}i$

인수분해를 이용하여 방정식을 풀 때, 공통인수가 있으면 공통인수로 묶고, 공통부분이 있으면 그것을 하나의 문자로 놓고 인수분해하여 푼다.

문제 2 다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^3+2x^2-3x=0$　　(2) $3x^4+x^3+3x^2+x=0$

(3) $x^4-x^2-6=0$　　(4) $x^4-11x^2+18=0$

인수정리
x에 대한 다항식 $P(x)$에 대하여 $P(\alpha)=0$이면 $P(x)$는 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.
또 $P(x)$가 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 $P(\alpha)=0$이다.

이제 인수정리를 이용하여 방정식의 근을 구하는 방법을 알아보자.

다항식 $P(x)$에 대하여 $P(\alpha)=0$이면 $x-\alpha$는 $P(x)$의 인수이므로

$$P(x)=(x-\alpha)Q(x)\ (Q(x)\text{는 } x\text{에 대한 다항식})$$

와 같이 인수분해할 수 있다.

따라서 이것을 이용하여 방정식의 근을 구할 수 있다.

예제 03

다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^3-7x+6=0$ (2) $x^4-3x^3+5x^2-9x+6=0$

풀이 (1) $P(x)=x^3-7x+6$이라고 하면 $P(1)=0$이므로 인수정리에 의하여 $x-1$은 $P(x)$의 인수이다.
조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

1	1	0	−7	6
		1	1	−6
	1	1	−6	0

$P(x)=(x-1)(x^2+x-6)=(x-1)(x-2)(x+3)$
이므로 주어진 방정식은

$$(x-1)(x-2)(x+3)=0$$

$$x-1=0 \text{ 또는 } x-2=0 \text{ 또는 } x+3=0$$

따라서 구하는 근은 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-3$이다.

(2) $P(x)=x^4-3x^3+5x^2-9x+6$이라고 하면 $P(1)=0$이므로 $x-1$은 $P(x)$의 인수이다.

$$P(x)=(x-1)(x^3-2x^2+3x-6)$$

$Q(x)=x^3-2x^2+3x-6$이라고 하면 $Q(2)=0$이므로 $x-2$는 $Q(x)$의 인수이다.

$$Q(x)=(x-2)(x^2+3)$$

1	1	−3	5	−9	6
		1	−2	3	−6
2	1	−2	3	−6	0
		2	0	6	
	1	0	3	0	

그러므로 주어진 방정식은

$$(x-1)(x-2)(x^2+3)=0$$

$$x-1=0 \text{ 또는 } x-2=0 \text{ 또는 } x^2+3=0$$

따라서 구하는 근은 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}i$이다.

답 (1) $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-3$ (2) $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}i$

문제 3

다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^3-2x^2-5x+6=0$ (2) $x^3-3x^2-10x+24=0$

(3) $x^4+2x^3-x^2-4x-2=0$ (4) $2x^4-7x^3+x^2+7x-3=0$

삼차방정식이나 사차방정식의 한 근이 주어졌을 때, 다른 근을 구하여 보자.

예제 04 삼차방정식 $x^3-px^2+qx+2=0$의 한 근이 i일 때, 다음을 구하여라. (단, p, q는 실수)

(1) p, q의 값　　　　(2) 나머지 두 근

풀이 (1) 주어진 방정식에 $x=i$를 대입하면

$$i^3-pi^2+qi+2=0$$
$$-i+p+qi+2=0$$
$$(p+2)+(q-1)i=0$$

p, q가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$p+2=0,\ \ q-1=0$$
$$p=-2,\ \ q=1$$

(2) (1)의 결과에 의해 주어진 삼차방정식은

$$x^3+2x^2+x+2=0$$
$$x^2(x+2)+(x+2)=0$$
$$(x+2)(x^2+1)=0$$
$$x=-2 \text{ 또는 } x=\pm i$$

따라서 나머지 두 근은 $x=-2$ 또는 $x=-i$이다.

답 (1) $p=-2$, $q=1$　(2) $x=-2$ 또는 $x=-i$

복소수가 서로 같을 조건
a, b가 실수일 때 $a+bi=0$이면 $a=0$, $b=0$이다.
또 $a=0$, $b=0$이면 $a+bi=0$이다.

문제 4 삼차방정식 $x^3+px+q=0$의 한 근이 $1+i$일 때, 다음을 구하여라. (단, p, q는 실수)

(1) p, q의 값　　　　(2) 나머지 두 근

사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라고 할 때, 다음 식의 값을 구하여 보자.

(1) $\omega^{100}+\omega^{200}+\omega^{300}$　　　　(2) $\omega+\dfrac{1}{\omega}$

02

연립방정식

● 미지수가 3개인 연립일차방정식과 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다.

미지수가 3개인 연립일차방정식을 어떻게 푸는가?

생각 열기

구장산술

지금으로부터 2000년 전 중국에서는 이미 방정식, 피타고라스 정리, 원주율 등을 알고 실생활에 응용하고 있었다. 특히 고대 중국의 수학 책인 "구장산술"은 조세 및 부역의 징발, 관개 수로 사업 등을 담당하던 관리들의 필독서였다. 모두 9개의 장(章)으로 이루어진 "구장산술"의 제8장인 '방정' 장에서 현재 우리가 사용하고 있는 방정식이란 용어가 유래되었다.



탐구 활동

다음은 "구장산술"의 '방정' 장에 나와 있는 문제이다. 물음에 답하여 보자.

> 상급 벼가 2단, 중급 벼가 3단, 하급 벼가 4단이 있다. 아래 세 가지의 경우는 모두 각각에서 나오는 쌀의 양이 정확히 1가마니가 된다.
> ① 상급 벼 2단과 중급 벼 1단
> ② 중급 벼 3단과 하급 벼 1단
> ③ 하급 벼 4단과 상급 벼 1단

1. 상급 벼, 중급 벼, 하급 벼 1단에서 나오는 쌀의 양을 각각 x, y, z가마니로 놓고, ①, ②, ③에서 나오는 쌀의 양을 x, y, z를 이용하여 나타내어 보자.

2. ②에서 구한 식에서 z를 y에 대한 식으로 나타내어 보자.

3. **2**에서 구한 식을 ③에서 구한 식에 대입하여 만든 식과 ①에서 구한 식을 연립하여 x와 y의 값을 구하여 보자.

4. **3**에서 구한 x, y의 값을 이용하여 z의 값을 구할 수 있는가?

미지수가 2개인 연립일차방정식을 풀 때에는 먼저 미지수 중에서 하나를 소거하여 푼다는 것을 중학교에서 배웠다.

이와 같은 방법으로 미지수가 3개인 연립일차방정식은 미지수 중에서 하나를 소거하여 미지수가 2개인 연립일차방정식을 만들어 풀면 편리하다.

예제 01

다음 연립일차방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} 2x+y+z=8 & \cdots\cdots ① \\ x+2y+z=6 & \cdots\cdots ② \\ x+y+2z=2 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

풀이 먼저 z를 소거하여 미지수가 2개인 연립일차방정식을 만든다.

①−②에서 $x-y=2$ ······ ④

②×2−③에서 $x+3y=10$ ······ ⑤

④, ⑤를 연립하여 풀면 $x=4,\ y=2$

$x=4,\ y=2$를 ①에 대입하여 풀면 $z=-2$

따라서 구하는 해는 $x=4,\ y=2,\ z=-2$이다.

답 $x=4,\ y=2,\ z=-2$

다른 풀이 주어진 세 방정식을 변끼리 모두 더하면

$$4x+4y+4z=16$$

$$x+y+z=4 \quad \cdots\cdots ⑥$$

①−⑥에서 $x=4$

②−⑥에서 $y=2$

③−⑥에서 $z=-2$

따라서 구하는 해는 $x=4,\ y=2,\ z=-2$이다.

문제 1

다음 연립일차방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+y-z=1 \\ x+2y-z=2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+y-z=6 \\ x-2y=-1 \\ 2x+3z=3 \end{cases}$

문제 2

다음 연립일차방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=7 \\ z+x=2 \end{cases}$

(2) $-x+y+z=x-y+z=x+y-z=5$

$A=B=C=a$ (a는 상수) 꼴의 방정식은 연립방정식 $\begin{cases} A=a \\ B=a \\ C=a \end{cases}$ 와 같다.

실생활

문제 3 어떤 농구 시합에서 A팀이 슛을 33회 성공시켜 61점을 득점하였다. 2점 슛으로 얻은 점수와 3점 슛으로 얻은 점수가 같을 때, 1점, 2점, 3점에 대한 점수별 슛의 성공 횟수를 각각 구하여라.



미지수가 2개인 연립일차방정식과 마찬가지로 미지수가 3개인 연립일차방정식도 해가 무수히 많거나 없는 경우도 있다.

예제 02

다음 연립일차방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} 7x+2y+z=5 & \cdots\cdots ① \\ 2x+y+z=1 & \cdots\cdots ② \\ x-y-2z=2 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+3y+z=2 & \cdots\cdots ① \\ x-y-z=-1 & \cdots\cdots ② \\ 2x+4y+z=1 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$

풀이 (1) 먼저 z를 소거하여 미지수가 2개인 연립일차방정식을 만든다.

①−②에서 $5x+y=4$ ⋯⋯ ④

②×2+③에서 $5x+y=4$ ⋯⋯ ⑤

④와 ⑤는 일치하므로 x, y의 값은 하나로 정해지지 않는다.

이때 $x=k$ (k는 임의의 실수)라고 하면 $y=-5k+4$

$x=k$, $y=-5k+4$를 ②에 대입하여 풀면 $z=3k-3$

따라서 구하는 해는

$$x=k,\ y=-5k+4,\ z=3k-3 \ (k\text{는 임의의 실수})$$

으로 나타낼 수 있는 모든 수이므로 무수히 많다.

(2) 먼저 z를 소거하여 미지수가 2개인 연립일차방정식을 만든다.

①+②에서 $2x+2y=1$ ⋯⋯ ④

②+③에서 $3x+3y=0$ ⋯⋯ ⑤

④, ⑤에서 각각 $x+y=\frac{1}{2}$, $x+y=0$이 되므로 $\frac{1}{2}=0$이라는 모순이 생긴다.

따라서 구하는 해는 없다.

답 (1) $x=k$, $y=-5k+4$, $z=3k-3$ (k는 임의의 실수) (2) 해는 없다.

문제 4 다음 연립일차방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x-3y+2z=-4 \\ 4x+3y-z=5 \\ 11x-3y+4z=-2 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+y-2z=1 \\ x-2y+z=-2 \\ x-3y+2z=-1 \end{cases}$

미지수가 2개인 연립이차방정식을 어떻게 푸는가?

탐구 활동

오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 모양으로 집, 학교, 체육관의 세 지점을 연결하는 도로가 있다. 집, 학교, 체육관 세 지점 사이의 거리의 합은 2.4 km이고, 집에서 학교까지의 거리는 1 km라고 한다. 다음 물음에 답하여 보자. (단, 학교와 체육관 사이의 거리가 집과 체육관 사이의 거리보다 멀고, 세 건물의 크기는 무시한다.)



1. 학교와 체육관 사이의 거리를 x km, 집과 체육관 사이의 거리를 y km라고 할 때, 세 지점 사이의 거리의 합을 x, y로 나타내어 보자.
2. 피타고라스 정리를 이용하여 x와 y 사이의 관계식을 구하여 보자.

미지수가 2개인 연립방정식에서 차수가 가장 높은 방정식이 이차방정식일 때, 이 연립방정식을 미지수가 2개인 연립이차방정식이라고 한다.

미지수가 2개인 연립이차방정식에는 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 것과 이차방정식으로만 이루어진 것의 두 종류가 있다.

먼저 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식을 푸는 방법을 알아보자.

이 경우에는 일차방정식을 변형하여 한 미지수를 다른 미지수로 나타낸 다음, 이차방정식에 대입하여 미지수가 1개인 이차방정식으로 만들어 푼다.

예제 03 다음 연립이차방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} x-2y=1 & \cdots\cdots ① \\ x^2-3y^2=6 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

풀이 ①에서 $x=2y+1$ ⋯⋯ ③

③을 ②에 대입하면 $(2y+1)^2-3y^2=6$, $y^2+4y-5=0$

$(y+5)(y-1)=0$, $y=-5$ 또는 $y=1$

이것을 ③에 대입하면 $y=-5$일 때 $x=-9$, $y=1$일 때 $x=3$이므로 구하는 해는

$$\begin{cases} x=-9 \\ y=-5 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$$

답 $\begin{cases} x=-9 \\ y=-5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

문제 5 다음 연립이차방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} 3x+y=1 \\ x^2-2y=5 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+y^2=29 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-12 \end{cases}$

발전

문제 6 둘레의 길이가 16 cm이고, 넓이가 15 cm^2인 직사각형의 대각선의 길이를 구하여라.

이차방정식으로만 이루어진 연립이차방정식을 푸는 경우에는 어느 한 이차식을 일차식의 곱으로 인수분해하여 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식으로 바꾸어 푼다.

예제 04 다음 연립이차방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} 2x^2+xy-y^2=0 & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2=10 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

상수항이 0인 식을 인수분해한다.

풀이 ①의 좌변을 인수분해하면 $(x+y)(2x-y)=0$

$y=-x$ 또는 $y=2x$

(i) $y=-x$를 ②에 대입하면 $x^2+x^2=10$, $x^2=5$, $x=\pm\sqrt{5}$

따라서 $x=\sqrt{5}$일 때 $y=-\sqrt{5}$, $x=-\sqrt{5}$일 때 $y=\sqrt{5}$이다.

(ii) $y=2x$를 ②에 대입하면 $x^2+4x^2=10$, $x^2=2$, $x=\pm\sqrt{2}$

따라서 $x=\sqrt{2}$일 때 $y=2\sqrt{2}$, $x=-\sqrt{2}$일 때 $y=-2\sqrt{2}$이다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 해는

$\begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=-\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{5} \\ y=\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=2\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=-2\sqrt{2} \end{cases}$

답 $\begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=-\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{5} \\ y=\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=2\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=-2\sqrt{2} \end{cases}$

문제 7 다음 연립이차방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=0 \\ 2x^2+xy+y^2=8 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=0 \\ x^2-2xy+2y^2=5 \end{cases}$

이차방정식으로만 이루어진 연립이차방정식에서 두 이차방정식의 상수항이 모두 0이 아닌 경우에는 상수항을 소거한 후 인수분해하여 푼다.

예제 05 다음 연립이차방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} x^2-y^2=3 & \cdots\cdots ① \\ x^2-xy+y^2=3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

풀이 ①−②에서 $xy-2y^2=0$, $y(x-2y)=0$

$y=0$ 또는 $x=2y$

(i) $y=0$을 ①에 대입하면 $x^2=3$, $x=\pm\sqrt{3}$

(ii) $x=2y$를 ①에 대입하면 $4y^2-y^2=3$, $y^2=1$, $y=\pm1$

따라서 $y=1$일 때 $x=2$, $y=-1$일 때 $x=-2$이다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 해는

$$\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=0 \end{cases} \text{또는} \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=0 \end{cases} \text{또는} \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \text{또는} \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$$

답 $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$

문제 8 다음 연립이차방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} 2x^2-3xy-y^2=-2 \\ x^2-3xy+4y^2=2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2-2xy=3 \\ xy-y^2=2 \end{cases}$

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

다음 표는 탄수화물, 지방, 단백질을 섭취하여 얻은 총열량을 나타낸 것이다.



탄수화물(g)	지방(g)	단백질(g)	총열량(kcal)
200	20	230	1900
200	40	210	2000
240	50	260	2450

이때 탄수화물, 지방, 단백질 1 g이 낼 수 있는 열량을 각각 구하여라.

중단원 기초

1 다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^3-9x=0$　　(2) $x^3-27=0$

(3) $x^4-4x^2+3=0$　　(4) $x^4-x^2-12=0$

01 삼차방정식과 사차방정식
인수분해 공식을 이용한 방정식의 풀이

2 다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^3+3x^2-4=0$　　(2) $x^3-2x-4=0$

(3) $x^3-6x^2+11x-6=0$　　(4) $x^4+x^3-x^2-7x-6=0$

01 삼차방정식과 사차방정식
인수정리를 이용한 방정식의 풀이

3 다음 연립일차방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x+y-z=2 \\ x-2y+z=2 \\ 2x+y-z=3 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+y=4 \\ y+z=-1 \\ z+x=3 \end{cases}$

02 연립방정식
미지수가 3개인 연립일차방정식

4 다음 연립이차방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} -x+y=1 \\ x^2+y-1=0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-1 \end{cases}$

02 연립방정식
미지수가 2개인 연립이차방정식

5 연립이차방정식 $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$ 을 풀어라.

02 연립방정식
미지수가 2개인 연립이차방정식

1 다음 방정식을 풀어라.

(1) $(x^2+2x)^2-(x^2+2x)-6=0$

(2) $(x-7)(x-5)(x+1)(x+3)+63=0$

01 삼차방정식과 사차방정식
사차방정식

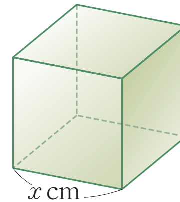
2 삼차방정식 $x^3+ax-b=0$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) 한 근이 $1+\sqrt{2}$일 때, 두 유리수 a, b의 값

(2) 한 근이 $1-i$일 때, 두 실수 a, b의 값

01 삼차방정식과 사차방정식
삼차방정식

3 한 모서리의 길이가 x cm인 정육면체에서 가로, 세로의 길이를 각각 1 cm, 2 cm씩 줄이고, 높이를 3 cm 늘려서 부피가 12 cm^3인 직육면체를 만들었다. x의 값을 구하여라. (단, $x>2$)



01 삼차방정식과 사차방정식
삼차방정식의 활용

4 다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x+y+3z=-5 \\ 2x-y-2z=9 \\ 3x+2y-z=6 \end{cases}$

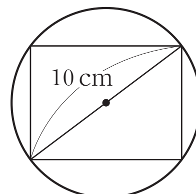
(2) $\begin{cases} x-3y=6 \\ y-3z=-4 \\ z-3x=-8 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 3x^2-5xy+2y^2=0 \\ x^2-2xy+2y^2=10 \end{cases}$

02 연립방정식
연립일차방정식과
연립이차방정식

5 오른쪽 그림과 같이 지름의 길이가 10 cm인 원에 둘레의 길이가 28 cm인 직사각형이 내접할 때, 이 직사각형의 두 변의 길이를 구하여라.



02 연립방정식
미지수가 2개인
연립이차방정식의 활용

중단원 실력

1 삼차방정식 $x^3+ax^2-8x+4b=0$이 중근 $x=2$를 가질 때, 두 실수 a, b의 값을 구하여라.

01 삼차방정식과 사차방정식
삼차방정식

2 삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라고 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.
(단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

(1) $\omega+\overline{\omega}$

(2) $\omega\overline{\omega}$

(3) $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^{11}$

01 삼차방정식과 사차방정식
삼차방정식

3 연립일차방정식 $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$에 대하여 해의 개수가 다음과 같을 때, 상수 a의 값 또는 그 조건을 구하여라.

(1) 해가 한 쌍만 있는 경우

(2) 해가 무수히 많은 경우

(3) 해가 없는 경우

02 연립방정식
미지수가 3개인
연립일차방정식

4 농도가 서로 다른 세 가지 설탕물 A, B, C가 있다. A와 B를 각각 100 g씩 혼합하였더니 15 %의 설탕물이 되었고, A와 C를 각각 100 g, 200 g씩 혼합하였더니 20 %의 설탕물이 되었다. 그리고 B와 C를 각각 100 g, 300 g씩 혼합하였더니 20 %의 설탕물이 되었다. 설탕물 A, B, C의 농도를 각각 구하여라.

02 연립방정식
미지수가 3개인
연립일차방정식의 활용

5 대각선의 길이가 10 cm인 직사각형이 있다. 가로의 길이를 4 cm 늘리고 세로의 길이를 1 cm 줄였더니 대각선의 길이가 3 cm 늘어났다고 할 때, 처음 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 구하여라.

02 연립방정식
미지수가 2개인
연립이차방정식의 활용

4

여러 가지 부등식

불꽃놀이의 색으로 원료의 성분을 알 수 있다.

밤하늘을 화려하게 수놓는 불꽃놀이에서 볼 수 있는 여러 가지 색깔은 어떻게 만들어질까? 화려한 색깔의 불꽃은 마그네슘, 알루미늄 등의 여러 가지 금속의 불꽃 반응을 이용한 것이다. 불꽃 반응이란 어떤 물질을 겉불꽃 속에 넣었을 때 그 속에 포함된 원소에 따라 독특한 불꽃색이 나타나는 반응을 말한다. 불꽃 반응이 일어나는 금속은 빛을 흡수하였다가 다시 방출하여 특정 파장의 빛을 내놓는데 금속의 종류마다 내놓는 빛의 파장이 다르기 때문에 불꽃 반응이 다양하게 나타난다. 예를 들어 방출된 빛의 파장이 650 nm(나노미터) 근처이면 붉은색이고 470 nm 근처이면 파란색이다.




스트론튬(Sr)은 짙은 빨간색, 구리(Cu)는 청록색의 빛을 낸다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 114쪽

부등식을 이용하여 금속의 불꽃 반응 색을 예측할 수 있을까?

01 부등식

● 부등식의 성질을 이해하고, 절댓값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있다.

부등식의 성질에는 어떤 것이 있는가?

생각 열기

난청

현대인은 스마트폰, MP3 플레이어, 인터넷 강의, 컴퓨터 게임 등 디지털 매체에 많이 노출되어 있고, 이를 이용할 때 대부분 이어폰을 사용하기 때문에 난청이 증가하고 있다. 난청은 타인과 의사소통을 하는 데 어려움을 주며, 현재 효과적인 치료법이 없으므로 이어폰 사용 시 볼륨을 낮추거나 오래 듣지 않는 등 예방에 힘써야 한다.



탐구 활동

다음 표는 난청의 정도에 따라 들을 수 있는 최소 소리의 크기를 나타낸 것이다. 물음에 답하여 보자.

난청의 정도에 따라 들을 수 있는 소리의 크기 (dB: 데시벨)

난청 정도	들을 수 있는 최소 소리의 크기(dB)	회화의 이해 정도
정상	0이상 ~ 30미만	속삭이는 소리까지 들을 수 있음
경도	30 ~ 50	소곤거리는 소리는 듣지 못함
중도	50 ~ 70	가까운 곳의 소리는 들을 수 있음
고도	70 ~ 90	크게 말해야 대화를 할 수 있음
심도	90 ~	소리를 전혀 듣지 못함

1. 들을 수 있는 최소 소리의 크기가 55 dB인 사람의 난청의 정도를 말하여 보자.

2. 소리의 크기가 x dB일 때, 경도 난청인 사람이 들을 수 있는 최소 소리의 크기를 부등호를 사용하여 나타내어 보자.

3. 소리의 크기가 x dB일 때, 심도 난청인 사람이 들을 수 있는 최소 소리의 크기를 부등호를 사용하여 나타내어 보자.

부등호 $<$, $>$, $\leq$, $\geq$를 사용하여 수 또는 식의 대소 관계를 나타낸 식을 부등식이라고 한다.

예를 들어 $3a+4b\geq 2a$, $a^2+2ab<3b^2$, $x^2-3x+6>-2x$ 등은 모두 부등식이다.

부등식을 풀 때에는 다음과 같은 부등식의 기본 성질을 이용한다.

부등식의 기본 성질

(1) $a>b$, $b>c$이면 $a>c$

(2) $a>b$이면 $a+c>b+c$, $a-c>b-c$

(3) $a>b$, $c>0$이면 $ac>bc$, $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

(4) $a>b$, $c<0$이면 $ac<bc$, $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$

허수에 대해서는 대소 관계를 생각할 수 없으므로 부등식에 포함되는 문자는 모두 실수를 나타낸다.

예제 01 $a>b$, $c>d$일 때, $a+c>b+d$임을 보여라.

풀이 $a>b$이므로 $a+c>b+c$ (부등식의 기본 성질 (2))

$c>d$이므로 $b+c>b+d$ (부등식의 기본 성질 (2))

따라서 $a+c>b+d$이다. (부등식의 기본 성질 (1))

문제 1 $a>b>0$, $c>d>0$일 때, $ac>bd$임을 보여라.

예제 02 $a>b>0$일 때, $a^2>b^2$임을 보여라.

중③ **실수의 대소 관계**
두 실수 a, b에 대하여
$a-b>0$이면 $a>b$이다.

풀이 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

이때 $a>0$, $b>0$이므로 $a+b>0$

$a>b$이므로 $a-b>0$

두 양수의 곱은 양수이므로 $(a+b)(a-b)>0$, $a^2-b^2>0$

따라서 $a^2>b^2$이다.

문제 2 $a<b<0$일 때, $a^2>b^2$임을 보여라.

절댓값을 포함한 일차부등식을 어떻게 푸는가?

탐구 활동 수직선 위의 원점 O와 점 P에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 점 P의 좌표를 x라고 할 때, $\overline{OP} \le 1$인 x값의 범위를 구하여 보자.
2. 1에서 구한 x값의 범위를 절댓값을 이용하여 나타내어 보자.

실수 x의 절댓값 $|x|$는 수직선 위에서 x를 나타내는 점과 원점 사이의 거리이다.

부등식 $|x|<2$는 수직선 위에서 x를 나타내는 점이 두 수 -2와 2 사이에 있음을 의미한다. 즉, $|x|<2$는 $-2<x<2$와 같은 의미이다.

마찬가지로 $|x|>2$는 수직선 위에서 x를 나타내는 점이 -2보다 작거나 2보다 크다는 것을 의미한다. 즉, $|x|>2$는 $x<-2$ 또는 $x>2$와 같은 의미이다.

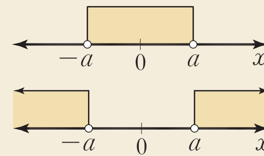
일반적으로 다음이 성립한다.

절댓값과 부등식

$a>0$일 때

(1) $|x|<a$는 '$-a<x<a$'이다.

(2) $|x|>a$는 '$x<-a$ 또는 $x>a$'이다.



예제 03 다음 부등식을 풀어라.

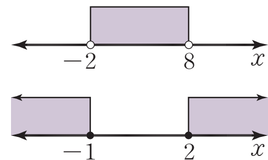
(1) $|x-3|<5$ (2) $|2x-1|\ge 3$

풀이 (1) $|x-3|<5$이면 $-5<x-3<5$

각 변에 3을 더하면 $-2<x<8$

(2) $|2x-1|\ge 3$이면 $2x-1\le -3$ 또는 $2x-1\ge 3$

$2x\le -2$ 또는 $2x\ge 4$, $x\le -1$ 또는 $x\ge 2$



답 (1) $-2<x<8$ (2) $x\le -1$ 또는 $x\ge 2$

문제 3 다음 부등식을 풀어라.

(1) $|x-1|<2$ (2) $|2x+1|\le 5$

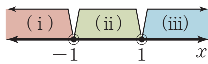
(3) $|5-2x|\ge 7$ (4) $\left|2-\frac{x}{3}\right|>1$

일반적으로 절댓값을 포함한 부등식을 풀 때에는 다음과 같이 절댓값 기호를 없애고 풀 수 있다.

$$|x-a|=\begin{cases} x-a & (x\ge a\text{일 때}) \\ -(x-a) & (x<a\text{일 때}) \end{cases}$$

예제 04 부등식 $|x-1|+|x+1|\le 6$을 풀어라.

절댓값 기호 안의 식의 부호에 따라 범위를 나눈다.



풀이 $x-1$, $x+1$이 0이 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나누어 생각한다.

(i) $x<-1$일 때

$-(x-1)-(x+1)\le 6$에서 $\quad -2x\le 6,\ x\ge -3$

그런데 $x<-1$이므로 $\quad -3\le x<-1$

(ii) $-1\le x<1$일 때

$-(x-1)+(x+1)\le 6$에서 $2\le 6$이므로 항상 성립한다.

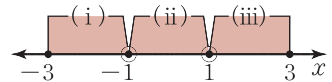
$-1\le x<1$

(iii) $x\ge 1$일 때

$(x-1)+(x+1)\le 6$에서 $\quad 2x\le 6,\ x\le 3$

그런데 $x\ge 1$이므로 $\quad 1\le x\le 3$

따라서 구하는 해는 (i), (ii), (iii)에서 $-3\le x\le 3$ 이다.



답 $\quad -3\le x\le 3$

문제 4 다음 부등식을 풀어라.

(1) $|x+3|+|x-2|\le 7$

(2) $2|x-4|+|x-1|>9$

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

오른쪽 표는 금속의 불꽃 반응에서 금속이 내놓는 빛의 파장에 따른 불꽃의 색을 나타낸 것이다. 나트륨(Na)이 불꽃 반응에서 내놓는 빛의 파장 λ nm(나노미터)에 대하여 $|\lambda-580|<10$일 때, 나트륨의 불꽃 반응은 어떤 색인지 말하여라.

파장(λ)에 따른 불꽃의 색

파장(nm)	색
$400\le\lambda<450$	보라
$450\le\lambda<500$	파랑
$500\le\lambda<570$	초록
$570\le\lambda<590$	노랑
$590\le\lambda<610$	주황
$610\le\lambda<700$	빨강

02 이차함수와 이차부등식의 관계

● 이차함수와 이차부등식의 관계를 이해하고, 이차부등식과 연립이차부등식을 풀 수 있다.

이차함수의 그래프를 이용하여 이차부등식의 해를 어떻게 구하는가?

탐구 활동

어느 리듬 체조 선수가 마룻바닥에서 1 m 높이의 위치에서 공을 위로 던져 올릴 때, x초 후의 공의 높이를 y m라고 하면 $y=-5x^2+14x+1$의 관계가 성립한다고 하자. 다음 물음에 답하여 보자.

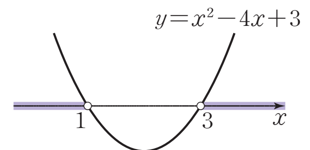


1. 이 선수가 던진 공이 마룻바닥으로부터 9 m보다 높이 있는 시간을 구하는 부등식을 $ax^2+bx+c<0$의 꼴로 나타내어 보자.
2. 1에서 구한 부등식의 a, b, c에 대하여 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프를 그려 보자.
3. 2의 그래프에서 함숫값이 0보다 작은 x값의 범위를 그래프에 표시하여 보자.

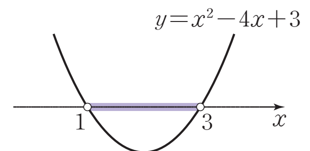
● 부등식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하였을 때 좌변이 x에 대한 이차식으로 나타나는 부등식을 x에 대한 이차부등식이라고 한다.

이차함수의 그래프를 이용하여 이차부등식의 해를 구하여 보자.

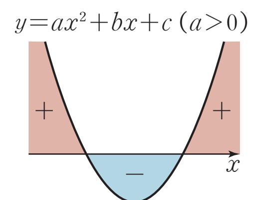
이차부등식 $x^2-4x+3>0$의 해는 이차함수 $y=x^2-4x+3$에서 $y>0$이 되도록 하는 x의 값, 즉 그래프가 x축보다 위에 있는 x값의 범위이므로 $x<1$ 또는 $x>3$이다.



한편 이차부등식 $x^2-4x+3<0$의 해는 이차함수 $y=x^2-4x+3$에서 $y<0$이 되도록 하는 x의 값, 즉 그래프가 x축보다 아래에 있는 x값의 범위이므로 $1<x<3$이다.



일반적으로 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$ $(a\neq0)$의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축보다 위에 있는 x값의 범위이고, 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축보다 아래에 있는 x값의 범위이다.



따라서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$의 판별식을 $D=b^2-4ac$라고 할 때, 이차함수의 그래프와 이차부등식의 해 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

이차함수의 그래프와 이차부등식의 해 ($a>0$인 경우)

판별식의 부호	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$ 의 그래프	α β x	$\alpha=\beta$ x	x
$ax^2+bx+c>0$ 의 해	$x<\alpha$ 또는 $x>\beta$	$x\neq\alpha$인 모든 실수	모든 실수
$ax^2+bx+c\geq 0$ 의 해	$x\leq\alpha$ 또는 $x\geq\beta$	모든 실수	모든 실수
$ax^2+bx+c<0$ 의 해	$\alpha<x<\beta$	없다.	없다.
$ax^2+bx+c\leq 0$ 의 해	$\alpha\leq x\leq\beta$	$x=\alpha$	없다.

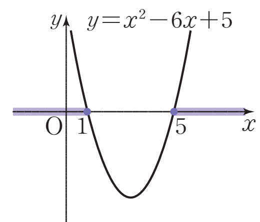
참고 $a<0$인 경우에는 주어진 부등식의 양변에 -1을 곱하여 부등식을 변형한 다음 푼다. 이때 부등호의 방향이 바뀌는 것에 주의한다.

예제 01

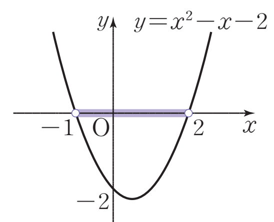
이차함수의 그래프를 이용하여 다음 이차부등식을 풀어라.

(1) $x^2-6x+5\geq 0$　　　　(2) $-x^2+x+2>0$

풀이 (1) 이차함수 $y=x^2-6x+5=(x-1)(x-5)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이차부등식 $x^2-6x+5\geq 0$의 해는 오른쪽 그림에서 그래프가 x축보다 위에 있거나 x축과 만나는 x값의 범위이다. 따라서 구하는 해는 $x\leq 1$ 또는 $x\geq 5$이다.



(2) 양변에 -1을 곱하면　$x^2-x-2<0$
이차함수 $y=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이차부등식 $x^2-x-2<0$의 해는 오른쪽 그림에서 그래프가 x축보다 아래에 있는 x값의 범위이다.
따라서 구하는 해는 $-1<x<2$이다.



답 (1) $x\leq 1$ 또는 $x\geq 5$　(2) $-1<x<2$

문제 1 이차함수의 그래프를 이용하여 다음 이차부등식을 풀어라.

(1) $x^2-11x+30<0$ (2) $-x^2-6x+7<0$

(3) $-2x^2+7x+4\geq0$ (4) $x^2-4x+1\geq0$

실생활

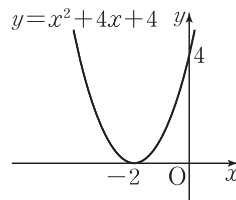
문제 2 지상으로부터 1008 m 높이의 비행기에서 낙하한 사람의 t초 후의 높이는 $(1008-2t-5t^2)$m라고 하자. 이 사람이 지상으로부터 적어도 488 m 이상에서 낙하산을 펴야 한다면, 낙하하기 시작한 후 몇 초 안에 낙하산을 펴야 하는지 구하여라.



예제 02 이차함수의 그래프를 이용하여 다음 이차부등식을 풀어라.

(1) $x^2+4x+4<0$ (2) $-x^2+10x-25<0$

풀이 (1) 이차함수 $y=x^2+4x+4=(x+2)^2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

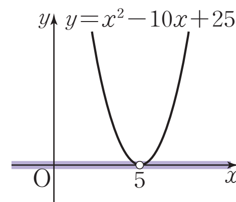


이차부등식 $x^2+4x+4<0$의 해는 오른쪽 그림에서 그래프가 x축보다 아래에 있는 x값의 범위이다.

따라서 구하는 해는 없다.

(2) 양변에 -1을 곱하면 $x^2-10x+25>0$

이차함수 $y=x^2-10x+25=(x-5)^2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이차부등식 $x^2-10x+25>0$의 해는 오른쪽 그림에서 그래프가 x축보다 위에 있는 x값의 범위이다.

따라서 구하는 해는 $x\neq5$인 모든 실수이다.

답 (1) 해는 없다. (2) $x\neq5$인 모든 실수

문제 3 이차함수의 그래프를 이용하여 다음 이차부등식을 풀어라.

(1) $x^2+2x+1>0$ (2) $x^2-6x+9<0$

(3) $16x^2-8x+1\geq0$ (4) $-4x^2+12x-9\geq0$

예제 03

이차함수의 그래프를 이용하여 다음 이차부등식을 풀어라.

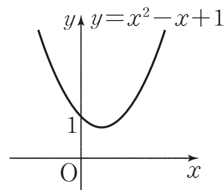
(1) $x^2-x+1<0$　　　　(2) $-x^2-4x-5\leq0$

풀이 (1) 이차방정식 $x^2-x+1=0$에서

$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$이므로 이차함수

$y=x^2-x+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 이차부등식 $x^2-x+1<0$의 해는 없다.

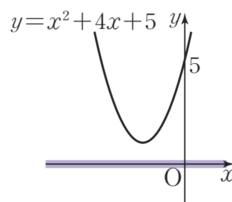


(2) 양변에 -1을 곱하면　$x^2+4x+5\geq0$

이차방정식 $x^2+4x+5=0$에서 $\dfrac{D}{4}=2^2-1\cdot5=-1<0$

이므로 이차함수 $y=x^2+4x+5$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 이차부등식 $x^2+4x+5\geq0$의 해는 모든 실수이므로 이차부등식 $-x^2-4x-5\leq0$의 해는 모든 실수이다.



답　(1) 해는 없다.　(2) 모든 실수

문제 4

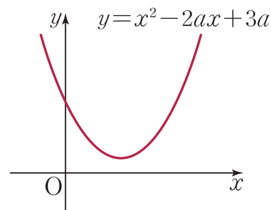
이차함수의 그래프를 이용하여 다음 이차부등식을 풀어라.

(1) $x^2+x+2<0$　　　　(2) $-4x^2-8x-7\leq0$

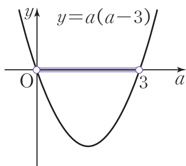
예제 04

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2-2ax+3a>0$이 성립하도록 하는 실수 a값의 범위를 구하여라.

풀이 이차함수 $y=x^2-2ax+3a$가 모든 실수 x에 대하여 $y>0$이 항상 성립해야 하므로 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다. 즉, 이차방정식 $x^2-2ax+3a=0$에서 판별식 $D<0$이어야 한다.



$\dfrac{D}{4}=a^2-3a<0$에서　$a(a-3)<0$



따라서 구하는 a값의 범위는 $0<a<3$이다.

답　$0<a<3$

문제 5

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $-2x^2-mx+m<0$이 성립하도록 하는 실수 m값의 범위를 구하여라.

예제 05 이차함수 $y=x^2-4x+4$의 그래프가 직선 $y=x-2$보다 위쪽에 있는 x값의 범위를 구하여라.

풀이 이차함수 $y=x^2-4x+4$의 함숫값이 직선 $y=x-2$의 함숫값보다 큰 x값의 범위를 구하면 된다.

$x^2-4x+4>x-2$에서 $x^2-5x+6>0$, $(x-2)(x-3)>0$

따라서 구하는 x값의 범위는 $x<2$ 또는 $x>3$이다.

답 $x<2$ 또는 $x>3$

문제 6 이차함수 $y=x^2-4x+1$의 그래프가 직선 $y=2x+8$보다 아래쪽에 있는 x값의 범위를 구하여라.

사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

이차부등식 $ax^2+bx+c<0$ $(a\neq0)$이 모든 실수 x에 대하여 성립하기 위한 실수 a, b, c의 조건을 구하여 보자.

연립이차부등식을 어떻게 푸는가?

탐구 활동



어느 회사에서 인터넷 배너 광고를 하기 위하여 직사각형 모양의 광고 창을 만들려고 한다. 이 광고 창의 둘레의 길이는 20 cm로 하고, 넓이를 21 cm^2 이상이 되도록 가로의 길이를 정하려고 한다. 가로의 길이를 세로의 길이보다 짧게 만든다고 할 때, 가로의 길이를 x cm라고 하면 다음 두 부등식을 얻을 수 있다. 물음에 답하여 보자.

$$\begin{cases} 0<x<10-x & \cdots\cdots ① \\ x(10-x)\geq21 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

1. 부등식 ①을 만족시키는 x값의 범위를 수직선 위에 나타내어 보자.

2. 부등식 ②를 만족시키는 x값의 범위를 수직선 위에 나타내어 보자.

3. ①과 ②에서 얻은 범위의 공통부분을 말하여 보자.

연립부등식을 이루고 있는 부등식 중에서 차수가 가장 높은 부등식이 이차부등식일 때, 이 연립부등식을 연립이차부등식이라고 한다.

연립이차부등식을 풀 때에는 중학교에서 배운 연립일차부등식을 풀 때와 마찬가지로 각 부등식의 해를 구한 후 이들의 공통부분을 구한다.

예제 06

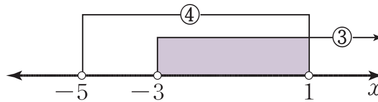
다음 연립이차부등식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} 2x+5>x+2 & \cdots\cdots ① \\ x^2+4x-5<0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2-5x+6\geq 0 & \cdots\cdots ① \\ x^2-3x-4<0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

연립이차부등식에서 각 부등식의 해의 공통부분을 구할 때, 수직선을 이용하면 편리하다.

풀이 (1) ①을 풀면 $x>-3$ ······ ③

②를 풀면 $(x+5)(x-1)<0$, $-5<x<1$ ······ ④

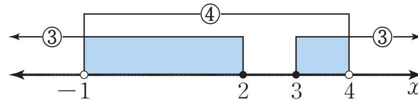


따라서 구하는 해는 ③, ④를 동시에 만족시키는 x값의 범위이므로

$$-3<x<1$$

(2) ①을 풀면 $(x-2)(x-3)\geq 0$, $x\leq 2$ 또는 $x\geq 3$ ······ ③

②를 풀면 $(x+1)(x-4)<0$, $-1<x<4$ ······ ④



따라서 구하는 해는 ③, ④를 동시에 만족시키는 x값의 범위이므로

$$-1<x\leq 2 \text{ 또는 } 3\leq x<4$$

답 (1) $-3<x<1$ (2) $-1<x\leq 2$ 또는 $3\leq x<4$

문제 7

다음 연립이차부등식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} 2x-1>0 \\ x^2-3x-4<0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2-4\geq 0 \\ x^2\leq x+20 \end{cases}$

(3) $2(x-3)<x(x-3)\leq x$ (4) $2x+5<x^2<7x+8$

$A<B<C$ 꼴의 부등식은 연립부등식 $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$ 와 같다.

발전 문제 8

두 이차방정식

$$x^2+2(1+a)x+3+a=0,\ x^2+ax+a=0$$

이 모두 허근을 가질 때, 실수 a값의 범위를 구하여라.

[해답 p.224]

중단원 기초

1 오른쪽 부등식의 풀이에서 쓰인 부등식의 기본 성질을 보기에서 찾아라.

보기
ㄱ. $a>b$, $b>c$이면 $a>c$
ㄴ. $a>b$이면 $a+c>b+c$
ㄷ. $a>b$, $c>0$이면 $ac>bc$
ㄹ. $a>b$, $c<0$이면 $ac<bc$

$1-3x<\frac{1}{2}x+8$
(1)
$2-6x<x+16$
(2)
$-7x<14$
(3)
$x>-2$

01 부등식
부등식의 기본 성질

2 다음 부등식을 풀어라.

(1) $|x+3|\geq 5$
(2) $|1-2x|<7$
(3) $\frac{|3x+1|}{2}\leq 1$
(4) $\left|1-\frac{1}{2}x\right|>3$

01 부등식
절댓값을 포함한 일차부등식

3 이차함수의 그래프를 이용하여 다음 이차부등식을 풀어라.

(1) $x^2-x-12\leq 0$
(2) $-x^2-3x+10<0$
(3) $x^2-8x+16\leq 0$
(4) $x^2+2x+5>0$

02 이차함수와 이차부등식의 관계
이차부등식

4 다음 연립이차부등식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} 2x-6\geq 0 \\ x^2-6x+8<0 \end{cases}$
(2) $\begin{cases} 3x-5\geq x-7 \\ x^2-4x+3>0 \end{cases}$
(3) $\begin{cases} x^2+2x-15\leq 0 \\ x^2-x-2\geq 0 \end{cases}$
(4) $\begin{cases} x^2-3x+2\geq 0 \\ x^2+x-6<0 \end{cases}$

02 이차함수와 이차부등식의 관계
연립이차부등식

중단원 기본

[해답 p.224]

수준별 학습

1 부등식 $(a-b)x<a+2b$의 해가 $x<3$일 때, 부등식 $ax>2b$를 풀어라.

01 부등식
부등식의 기본 성질

2 부등식 $3|x|+|x-2|>4$를 풀어라.

01 부등식
절댓값을 포함한 일차부등식

3 이차부등식 $x^2-2kx-k>0$의 해가 모든 실수가 되도록 하는 실수 k값의 범위를 구하여라.

02 이차함수와 이차부등식의 관계
이차부등식

4 다음 연립이차부등식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} 2x^2-7x+3\geq 0 \\ x^2-8x+12<0 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x^2\geq 4 \\ x^2+4x-5<0 \end{cases}$

(3) $x-1<3\leq 4x^2-x$　(4) $x-2\leq x^2-2x<x+4$

02 이차함수와 이차부등식의 관계
연립이차부등식

5 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2-3x+a>0 \\ x^2+bx-8\leq 0 \end{cases}$ 의 해가 $-2\leq x<1$ 또는 $2<x\leq 4$라고 할 때, 실수 a, b의 값을 구하여라.

02 이차함수와 이차부등식의 관계
연립이차부등식

중단원 실력

1 $a<x<b$, $c<y<d$일 때, 다음 중에서 항상 옳은 것을 모두 찾고, 그렇지 않은 것은 예를 들어 설명하여라.

(1) $a+c<x+y<b+d$

(2) $a-d<x-y<b-c$

(3) $ac<xy<bd$

01 부등식
부등식의 기본 성질

2 부등식 $|x|+|x+1|\le a$의 해가 $-\frac{3}{2}\le x\le b$일 때, 실수 a, b의 값을 구하여라.

01 부등식
절댓값을 포함한 일차부등식

3 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2-5x-6<0 \\ x^2-3x-10>0 \end{cases}$의 임의의 해가 이차부등식 $x^2-a^2<0$을 만족시킬 때, 실수 a값의 범위를 구하여라.

02 이차함수와 이차부등식의 관계
연립이차부등식

4 세 변의 길이가 x, $x+1$, $x+2$인 삼각형이 둔각삼각형이 되도록 하는 자연수 x의 개수를 구하여라.

02 이차함수와 이차부등식의 관계
연립이차부등식

5 이차부등식 $x^2-5x+4\ge0$과 $x^2+(a-3)x-3a<0$을 동시에 만족시키는 정수 x가 오직 한 개만 존재할 때, 실수 a값의 범위를 구하여라.

02 이차함수와 이차부등식의 관계
연립이차부등식

수행 과제

자동차의 정지거리

교통사고를 예방하기 위해서는 운전자의 안전거리 확보가 중요한데, 안전거리란 앞차가 갑자기 정지하더라도 부딪치지 않도록 유지해야 하는 앞차와의 거리를 말한다.

그럼 안전거리는 얼마나 확보해야 할까?

운전자가 멈춰야 한다는 판단을 한 순간부터 브레이크 페달을 밟은 뒤 자동차가 완전히 정지할 때까지 자동차가 움직인 거리를 정지거리라고 하는데, 안전거리는 정지거리 이상으로 유지해야 한다.

정지거리에 영향을 주는 요인으로는 운전자의 주의력, 반응 속도, 자동차의 무게, 브레이크의 성능, 도로의 상태 등이 있으며, 속력이 빠르면 정지거리는 길어진다.

어떤 고속 국도에서 시속 x km로 달리는 자동차의 정지거리 y m는

$$y=\frac{1}{100}x^2+\frac{3}{50}x$$

라고 한다. 다음 물음에 답하여 보자.



| 과 제 | **1** 이 고속 국도에서 시속 80 km로 달리는 자동차가 확보해야 하는 최소 안전거리를 구하여라.

| 과 제 | **2** 이 고속 국도에서 유지해야 하는 안전거리의 규정이 100 m 이상으로 주어졌을 때, 규정을 준수하면서 달릴 수 있는 최대 속력은 약 몇 km/h인지 구하여라.

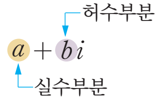
대단원 학습 내용 정리

1 복소수

복소수

(1) 허수단위: 제곱하여 -1이 되는 수, $i=\sqrt{-1}$

(2) 복소수: $a+bi$ (a, b는 실수)의 꼴로 나타내는 수



(3) 허수: 실수가 아닌 복소수

(4) 복소수 $a+bi$의 켤레복소수는 $\overline{a+bi}=a-bi$

복소수의 사칙계산

a, b, c, d가 실수일 때

(1) $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

(2) $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

(3) $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

(4) $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$ (단, $c+di\neq0$)

2 이차방정식

이차방정식의 근의 판별

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$의 판별식 $D=b^2-4ac$에 대하여

(1) $D>0$이면 서로 다른 두 실근을 가진다.
또 서로 다른 두 실근을 가지면 $D>0$이다.

(2) $D=0$이면 중근(실근)을 가진다.
또 중근을 가지면 $D=0$이다.

(3) $D<0$이면 서로 다른 두 허근을 가진다.
또 서로 다른 두 허근을 가지면 $D<0$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$의 두 근을 α, β라고 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

3 이차방정식과 이차함수

이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

이차함수 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계는 이차방정식 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$의 판별식을 D라고 할 때

(1) $D>0$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.
또 서로 다른 두 점에서 만나면 $D>0$이다.

(2) $D=0$이면 한 점에서 만난다(접한다).
또 한 점에서 만나면(접하면) $D=0$이다.

(3) $D<0$이면 만나지 않는다.
또 만나지 않으면 $D<0$이다.

4 여러 가지 부등식

절댓값과 부등식

$a>0$일 때

(1) $|x|<a$는 '$-a<x<a$'이다.

(2) $|x|>a$는 '$x<-a$ 또는 $x>a$'이다.

이차부등식의 해

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$의 판별식을 $D=b^2-4ac$라고 할 때, 다음이 성립한다.

D의 부호	$y=ax^2+bx+c$	$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c<0$
$D>0$	+, −, +, α, β, x	$x<\alpha$ 또는 $x>\beta$	$\alpha<x<\beta$
$D=0$	+, +, $\alpha=\beta$, x	$x\neq\alpha$인 모든 실수	해가 없다.
$D<0$	+, +, x	모든 실수	해가 없다.

용어와 기호 허수단위, 복소수, 실수부분, 허수부분, 허수, 켤레복소수, 실근, 허근, 판별식, i, $a+bi$, $\overline{a+bi}$

대/단/원 평가 문제

선택형

1 $(3+i)\bar{z}+2iz=7+9i$를 만족시키는 복소수 $z=x+yi$ (x, y는 실수)에 대하여 xy의 값은? (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

2 다음 중에서 허근을 가지는 이차방정식은?

① $x^2+4x-3=0$ ② $4x^2-6x+1=0$
③ $x^2+2x+3=0$ ④ $x^2+2x-7=0$
⑤ $5x^2-4=0$

3 이차방정식 $x^2-3x+5=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, α^2, β^2을 두 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식은?

① $x^2-x+25=0$
② $x^2+x+25=0$
③ $x^2-19x+25=0$
④ $x^2+19x+25=0$
⑤ $x^2+19x-25=0$

4 이차함수 $y=x^2-2ax+6$의 최솟값이 2가 되도록 하는 상수 a값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

5 이차함수 $f(x)=x^2-4x+a$의 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리가 6일 때, $f(x)$의 최솟값은?

① -10 ② -9 ③ -8
④ -7 ⑤ -6

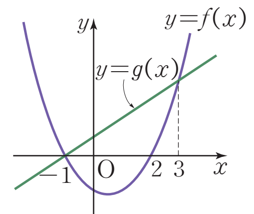
6 삼차방정식 $x^3-px+6=0$의 한 근이 -2이다. 이 방정식의 나머지 두 근을 α, β라고 할 때, $p+\alpha+\beta$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

7 연립일차방정식 $\begin{cases} x-2y+z=8 \\ 3x+2y+2z=7 \\ 2x-y-2z=6 \end{cases}$ 의 해를 $x=a$, $y=b$, $z=c$라고 할 때, $a-b+c$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

8 이차함수 $y=f(x)$와 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 부등식 $f(x)>g(x)$와 같은 해를 가지고, x^2의 계수가 1인 이차부등식을 $x^2+ax+b>0$이라고 하자. 이때 두 상수 a, b의 값을 차례로 적으면?



① 2, 3 ② -2, 3 ③ -2, -3
④ 3, 2 ⑤ -3, 2

9 부등식 $|2x-3|<1$의 해가 $a<x<b$라고 할 때, $x^2-bx+a\leq 0$의 해는?

① 해는 없다. ② $x=1$
③ $x\leq 1$ ④ $x\neq 1$인 모든 실수
⑤ 모든 실수

10 이차부등식 $ax^2-4(a-1)x+3a\geq 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 하는 정수 a의 개수는?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

11 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2+ax-b\leq 0 \\ x^2+bx+2a>0 \end{cases}$의 해가 $1<x\leq 3$일 때, 실수 a, b에 대하여 $b-a$의 값은?

① -10 ② -5 ③ 0
④ 5 ⑤ 10

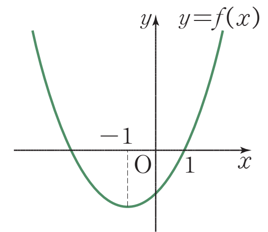
서답형

12 $a=(1+i)^n$이 양의 실수가 되도록 하는 최소의 자연수 n의 값과 그때의 a의 값에 대하여 $n+a$의 값을 구하여라.

13 이차함수 $y=x^2-2x+3$의 그래프가 직선 $y=mx-1$의 위쪽에 있을 때, 실수 m값의 범위를 구하여라.

14 내접원의 반지름의 길이가 2인 직각삼각형이 있다. 이 삼각형의 둘레의 길이가 24일 때, 세 변의 길이를 구하여라.

15 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 점 $(1,\ 0)$을 지나고 꼭짓점의 x좌표가 $x=-1$일 때, 다음을 구하여라.



(1) 방정식 $f(x)=0$의 해
(2) 부등식 $f(x)<0$의 해

|서|술|형|

16 삼차방정식 $x^3-3x^2+ax+b=0$의 한 근이 $\sqrt{2}i$일 때, 실수 a, b의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

|서|술|형|

17 이차방정식 $x^2-ax+1=0$은 실근을 가지고, $x^2+(a-1)x+1=0$은 허근을 가질 때, 실수 a값의 범위를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

삼차방정식은 누가 처음 풀었을까?

삼차방정식의 대수적 해법을 최초로 발견한 사람은 1515년 이탈리아 볼로냐 대학의 수학 교수였던 페로(Ferro, S. ; 1465~1526)이다. 그는 그 결과를 자신의 제자이자 사위인 피어에게만 알려 주고 죽었다.

1535년경에 타르탈리아(Tartaglia, N. F. ; 1499~1557)가 삼차방정식의 대수적 해법을 발견하였다고 주장하자, 피어는 타르탈리아에게 방정식의 풀이에 관한 시합을 제안하였다. 결국 이 시합에서 타르탈리아가 승리하여 명성을 얻게 되었지만 그는 끝까지 그 해법을 발표하지 않았다.



타르탈리아

삼차방정식의 해법을 알고 싶어 하던 카르다노(Cardano, G. ; 1501~1576)가 타르탈리아에게 삼차방정식의 해법을 알려 주면 비밀도 지키고 좋은 후원자를 소개시켜 주겠다고 제안하였다. 결국 타르탈리아는 카르다노에게 삼차방정식의 해법을 알려 주었고, 카르다노는 이것을 자기의 업적인 양 그의 책 “위대한 술법”을 통하여 발표해 버렸다. 타르탈리아는 언어 장애가 있었기 때문에 오히려 표절자로 몰렸고, 그 때문에 삼차방정식의 해법은 ‘카르다노의 공식’이라고 불리게 되었다.



카르다노

그러나 오늘날 이 모든 것이 밝혀지면서 삼차방정식의 대수적 해법에 관한 공적은 카르다노와 타르탈리아에게 동시에 돌리고 있다.

스마트폰으로 교점의 좌표를 구하여 보자.

스마트폰의 애플리케이션을 활용하면 함수의 그래프에 대한 다양한 학습 활동과 흥미 있는 경험을 할 수 있다. 적절한 애플리케이션을 이용하여 두 함수의 그래프의 교점의 좌표를 구하여 보자.

1 \ 두 함수 $y=-x-1$, $y=x^2-2x-3$의 그래프를 하나의 좌표평면 위에 그려 보자.

❶ 함수 $y=-x-1$의 그래프를 그리기 위하여 초기 화면의 '$f(x)=$' 옆에 '$-x-1$'을 입력하고 OK, Add 를 차례로 누른다.

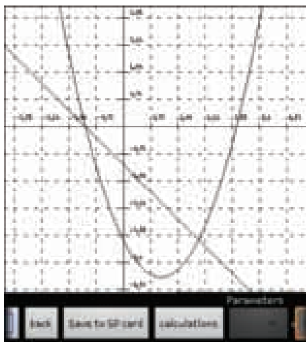
❷ 함수 $y=x^2-2x-3$의 그래프를 그리기 위하여 '$f(x)=$' 옆에 '$x^2-2*x-3$'을 입력하고 OK, Add 를 차례로 누른다.

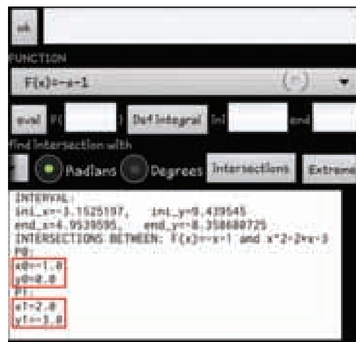
❸ Show Graph 를 누르면 두 그래프가 하나의 좌표평면에 위에 그려진다.



2 \ 두 함수 $y=-x-1$, $y=x^2-2x-3$의 그래프의 교점의 좌표를 구하여 보자.

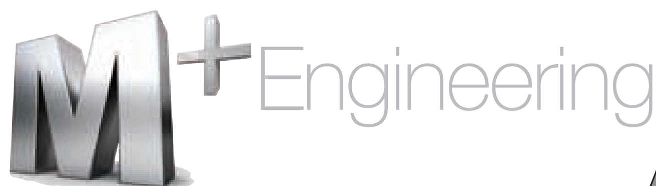
위의 그림에서 Calculator 를 누르거나 다음 왼쪽 그림에서 calculations 를 누른 뒤 Intersections 를 누르면 교점의 좌표는 오른쪽 그림에서 $(-1,\ 0)$, $(2,\ -3)$임을 알 수 있다.





3 \ 두 함수 $y=x+1$, $y=x^2-2x+1$의 그래프의 교점의 좌표를 구하여 보자.

수 학 ✚ 공 학





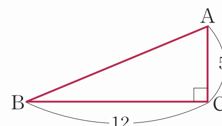
우리가 사는 세상에서는 다양한 형태의 도형을 볼 수 있다.

III 도형의 방정식

| 준 | 비 | 학 | 습 |

중 ③ 피타고라스 정리

1 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 선분 AB의 길이를 구하여라.



수학 I 연립이차방정식

2 다음 연립이차방정식을 풀어라.

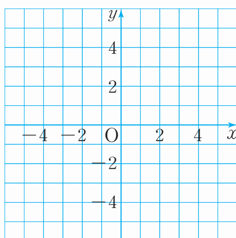
(1) $\begin{cases} y=x+1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y=-x-2 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$

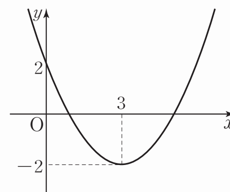
중 ③ 이차함수의 그래프

3 다음 물음에 답하여라.

(1) 이차함수 $y=x^2-2x-3$의 그래프를 다음 좌표평면 위에 그려라.



(2) 그래프가 다음 그림과 같은 이차함수의 식을 구하여라.

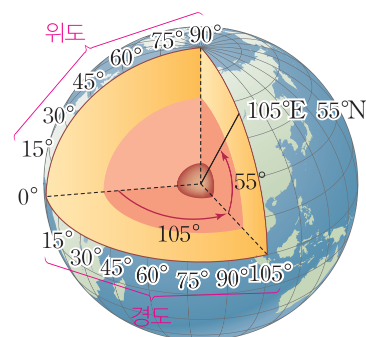


1

평면좌표

위도와 경도

일상생활에서 어떤 위치를 말할 때 흔히 주소를 사용한다. 하지만 깊은 산속이나 드넓은 바다 또는 사막 한가운데에 있을 때, 자신의 위치를 어떻게 말하면 좋을까? 바로 이때 필요한 것이 좌표이다. 좌표는 지구 상 어디든 그 위치를 알파벳, 숫자, 기호 등을 통해 표현할 수 있는 일종의 전 지구 주소 체계라고 할 수 있다.



전 세계에서 사용되는 좌표계 중 경위도 좌표계는 위도와 경도로써 그 위치를 표현한다. 위도란 지구 중심에서 적도 방향을 기준으로 남북 방향의 각도로 특정 위치를 표현한 것이며, 적도를 기준으로 북쪽 지역은 북위(N), 남쪽 지역은 남위(S)라고 한다. 경도란 지구 중심에서 영국의 그리니치 천문대 방향을 기준으로 동서 방향의 각도로 특정 위치를 표현한 것이며, 그리니치 천문대를 기준으로 동쪽 지역은 동경(E), 서쪽 지역은 서경(W)이라고 한다.

일정 각도 간격의 위도선들은 전 세계 어디서나 폭이 대체로 비슷하지만, 경도선들은 적도에서 폭이 가장 넓고 북극점과 남극점에 가까울수록 그 폭이 좁아진다.



단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 135쪽

위도와 경도를 이용하여 두 지점 사이의 거리를 구할 수 있을까?

01 두 점 사이의 거리

● 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.

두 점 사이의 거리를 어떻게 구하는가?

생각 열기

지도

지도는 지표의 일부 또는 전체를 축소시켜 각종 기호와 문자를 사용하여 평면에 그림으로 표현한 것을 말한다. 본격적으로 지도가 제작되기 시작한 것은 중세 후반 지중해를 중심으로 상업과 해상 활동이 활기를 띠면서부터이다. 이와 더불어 중국에서 나침반이 발명되고, 항해술, 조선술이 발달하면서 지도 제작에 새로운 전환기를 가져왔다. 또한 인쇄술이 발달하면서 대량 생산이 가능해져 지도책이 출간되기 시작하였다.

탐구 활동

다음은 1 km 간격으로 평행선을 그어서 거리를 나타낸 어느 지역의 지도이다. 이 지도를 보고 물음에 답하여 보자.



1. 학교와 서점, 서점과 주유소 사이의 직선거리를 각각 구하여 보자.
2. 피타고라스 정리를 이용하여 학교와 주유소 사이의 직선거리를 구하여 보자.
3. 학교의 위치를 원점 $(0,\ 0)$, 서점의 위치를 $(3,\ 0)$이라고 할 때, 주유소, 편의점, 약국의 위치를 나타내는 좌표를 각각 구하여 보자.

중① 수직선 위의 한 점 A에 실수 a가 대응될 때, a를 점 A의 좌표라고 하며, 이것을 기호로 $\mathrm{A}(a)$와 같이 나타낸다.

● $|a|=\begin{cases} a & (a\geq 0\text{일 때}) \\ -a & (a<0\text{일 때}) \end{cases}$

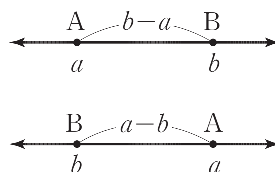
수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(a)$, $\mathrm{B}(b)$ 사이의 거리 $\overline{\mathrm{AB}}$는

$$a\leq b\text{일 때}\quad \overline{\mathrm{AB}}=b-a$$

$$a>b\text{일 때}\quad \overline{\mathrm{AB}}=a-b$$

이므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\overline{\mathrm{AB}}=|b-a|$$

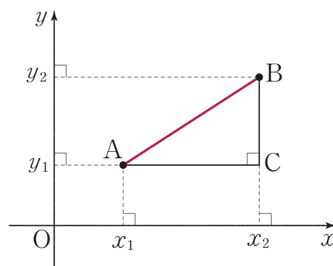


문제 1 다음 수직선 위의 두 점 사이의 거리를 구하여라.

(1) $\mathrm{A}(-3)$, $\mathrm{B}(1)$ (2) $\mathrm{O}(0)$, $\mathrm{P}(6)$

이제 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리를 구하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 각각 x축, y축에 평행하게 그은 두 직선의 교점을 C라고 하면 삼각형 ABC는 직각삼각형이고, 점 C의 좌표는 $(x_2,\ y_1)$이다. 이때



$$\overline{\mathrm{AC}}=|x_2-x_1|,\ \overline{\mathrm{BC}}=|y_2-y_1|$$

이므로 피타고라스 정리에 의하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}}^2&=\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2\\&=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2\\&=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\end{aligned}$$

a가 실수일 때 $|a|^2=a^2$

따라서 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리 $\overline{\mathrm{AB}}$는

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

이다. 특히 원점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$과 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.



좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

특히 원점 O와 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

보기 (1) 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$, $\mathrm{B}(4,\ 6)$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(4-1)^2+(6-2)^2}=\sqrt{25}=5$$

(2) 원점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$과 점 $\mathrm{A}(-1,\ 3)$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$$

문제 2 다음 두 점 A, B 사이의 거리를 구하여라.

(1) $\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{B}(2,\ 0)$ (2) $\mathrm{A}(-2,\ 1)$, $\mathrm{B}(2,\ -3)$

(3) $\mathrm{A}(2,\ 5)$, $\mathrm{B}(7,\ 5)$ (4) $\mathrm{A}(0,\ 0)$, $\mathrm{B}(-1,\ 4)$

예제 01 세 점 $A(2,\ 2)$, $B(-4,\ -1)$, $C(4,\ -2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 직각삼각형임을 보여라.

풀이 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 구하면

$$\overline{AB}=\sqrt{(-4-2)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{45}$$
$$\overline{BC}=\sqrt{\{4-(-4)\}^2+\{-2-(-1)\}^2}=\sqrt{65}$$
$$\overline{CA}=\sqrt{(2-4)^2+\{2-(-2)\}^2}=\sqrt{20}$$

이므로 $\overline{AB}^2+\overline{CA}^2=45+20=65=\overline{BC}^2$

따라서 삼각형 ABC는 $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형이다.

문제 3 세 점 $A(-4,\ 1)$, $B(2,\ -2)$, $C(5,\ 4)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 말하여라.

예제 02 두 점 $A(-1,\ 3)$, $B(3,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표를 구하여라.

● x축 위에 있는 점의 y좌표는 0이다.

풀이 점 P의 좌표를 $(x,\ 0)$이라고 하면

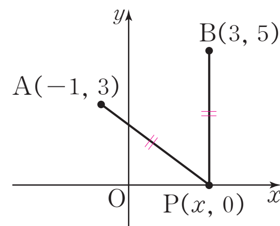
$$\overline{AP}=\sqrt{\{x-(-1)\}^2+(0-3)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(0-3)^2}$$
$$\overline{BP}=\sqrt{(x-3)^2+(0-5)^2}$$

주어진 조건에서 $\overline{AP}=\overline{BP}$, 즉 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(x+1)^2+(0-3)^2=(x-3)^2+(0-5)^2$

$8x=24,\ x=3$

따라서 점 P의 좌표는 $P(3,\ 0)$이다.



답 $P(3,\ 0)$

문제 4 두 점 $A(2,\ 3)$, $B(5,\ -4)$에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점 P의 좌표를 구하여라.

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.



우리나라에서 경도선의 간격은 1°에 99 km, 위도선의 간격은 1°에 111 km이고, 독도의 위치는 (동경 131°, 북위 37°), 제주도의 위치는 (동경 126°, 북위 33°)라고 할 때, 독도와 제주도 사이의 거리는 약 몇 km인지 구하여라.

02 선분의 내분과 외분

● 선분의 내분과 외분을 이해하고, 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다.

수직선 위에서 선분을 내분하는 점과 외분하는 점을 어떻게 구하는가?

생각 열기

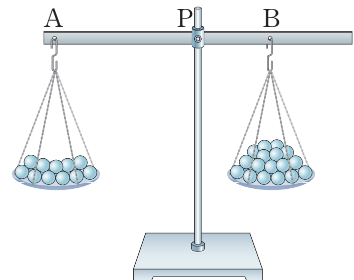
지레

옛날부터 사람들은 무거운 물체를 들어 올리거나 이동시키기 위하여 지레, 도르래, 빗면 등의 도구를 사용하였다. 기원전 3세기경 아르키메데스(Archimedes ; B.C. 287~B.C. 212)는 "나에게 충분히 긴 지렛대와 받침대를 준다면 지구도 들 수 있다."라고 하였다. 이 말은 지레를 이용하면 작은 힘으로도 매우 무거운 물체를 들거나 움직이게 할 수 있다는 것을 비유한 것이다. 지레의 종류로는 가위, 병따개, 핀셋, 양팔저울 등이 있다.



탐구 활동

오른쪽 그림과 같은 양팔저울이 수평을 이룰 때, 선분 AP와 선분 PB의 길이는 A와 B에 매달려 있는 물체의 무게에 반비례한다고 한다. 다음 물음에 답하여 보자.



1. A와 B에 매달려 있는 물체의 무게의 비가 2 : 3일 때, $\overline{AP}:\overline{PB}$를 구하여 보자.

2. A와 B에 매달려 있는 물체의 무게의 비가 $n:m$일 때, $\overline{AP}:\overline{PB}$를 구하여 보자.

선분 AB 위의 점 P에 대하여

$$\overline{AP}:\overline{PB}=m:n\ (m>0,\ n>0)$$

일 때, 점 P는 선분 AB를 $m:n$으로 **내분**한다고 한다.

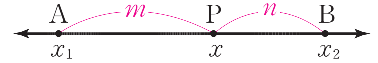


● 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점 P는 선분 AB 위에 있다.

● 선분을 내분하는 점을 내분점이라고 한다.

이제 수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m : n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표 x를 구하여 보자.

(i) $x_1<x<x_2$일 때



$$\overline{AP}=x-x_1,\ \overline{PB}=x_2-x$$

이고, $\overline{AP} : \overline{PB}=m : n$이므로

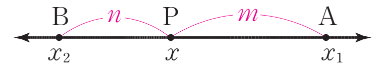
$$(x-x_1) : (x_2-x)=m : n$$

$$n(x-x_1)=m(x_2-x)$$

이다. 이것을 x에 대하여 풀면 다음과 같다.

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$$

(ii) $x_2<x<x_1$일 때



$$\overline{AP}=x_1-x,\ \overline{PB}=x-x_2$$

이고, $\overline{AP} : \overline{PB}=m : n$이므로

$$(x_1-x) : (x-x_2)=m : n$$

$$n(x_1-x)=m(x-x_2)$$

이다. 이것을 x에 대하여 풀면 다음과 같다.

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$$

(i), (ii)에 의하여 선분 AB를 $m : n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표 x는

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$$

이다. 특히 $m=n$일 때 점 P는 선분 AB의 중점이 되고, 그 좌표 x는

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}$$

이다.

선분 AB의 중점은 선분 AB를 1 : 1로 내분하는 점이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

수직선 위의 선분을 내분하는 점의 좌표

수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m : n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}\right)$$

특히 선분 AB의 중점 M의 좌표는

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

예제 01 수직선 위의 두 점 A(1), B(9)에 대하여 선분 AB를 1 : 3으로 내분하는 점 P와 선분 AB의 중점 M의 좌표를 각각 구하여라.

풀이 점 P의 좌표를 x_1이라고 하면 $x_1=\frac{1\times9+3\times1}{1+3}=3$이므로 점 P의 좌표는 P(3)

점 M의 좌표를 x_2라고 하면 $x_2=\frac{1+9}{2}=5$이므로 점 M의 좌표는 M(5)

답 P(3), M(5)

문제 1 수직선 위의 두 점 A(−4), B(6)에 대하여 다음 점의 좌표를 구하여라.

(1) 선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점 P

(2) 선분 AB를 3 : 2로 내분하는 점 Q

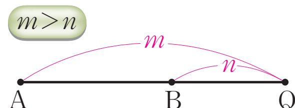
(3) 선분 AB의 중점 M

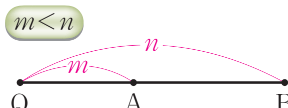
선분 AB의 연장선 위의 점 Q에 대하여

$$\overline{AQ} : \overline{BQ}=m : n \ (m>0,\ n>0,\ m\neq n)$$

일 때, 점 Q는 선분 AB를 $m : n$으로 **외분**한다고 한다.

- 선분 AB를 $m : n$으로 외분하는 점 Q는 선분 AB의 연장선 위에 있다.
- 선분을 외분하는 점을 외분점이라고 한다.

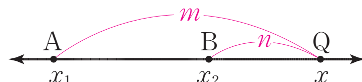




이제 수직선 위의 두 점 A(x_1), B(x_2)에 대하여 선분 AB를 $m : n$ ($m>0$, $n>0$, $m\neq n$)으로 외분하는 점 Q의 좌표 x를 구하여 보자.

(i) $x_1<x_2<x$일 때

$$\overline{AQ}=x-x_1,\ \ \overline{BQ}=x-x_2$$



이고, $\overline{AQ} : \overline{BQ}=m : n$이므로

$$(x-x_1) : (x-x_2)=m : n$$

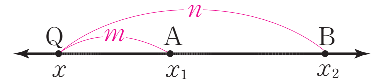
$$n(x-x_1)=m(x-x_2)$$

이다. 이것을 x에 대하여 풀면 다음과 같다.

$$x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}$$

(ii) $x<x_1<x_2$일 때

$$\overline{AQ}=x_1-x,\ \overline{BQ}=x_2-x$$



이고, $\overline{AQ}:\overline{BQ}=m:n$이므로

$$(x_1-x):(x_2-x)=m:n$$

$$n(x_1-x)=m(x_2-x)$$

이다. 이것을 x에 대하여 풀면 다음과 같다.

$$x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}$$

(i), (ii)에 의하여 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 좌표 x는

$$x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}$$

이다.

$x_1>x_2$일 때에도 같은 결과를 얻는다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

수직선 위의 선분을 외분하는 점의 좌표

수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}\right)$$

보기 수직선 위의 두 점 A(1), B(3)에 대하여 선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점 Q의 좌표 x는

$$x=\frac{2\times3-1\times1}{2-1}=5$$

문제 2 수직선 위의 두 점 A(−5), B(3)에 대하여 다음 점의 좌표를 구하여라.

(1) 선분 AB를 3 : 2로 외분하는 점 P

(2) 선분 AB를 2 : 3으로 외분하는 점 Q

사고력 기르기

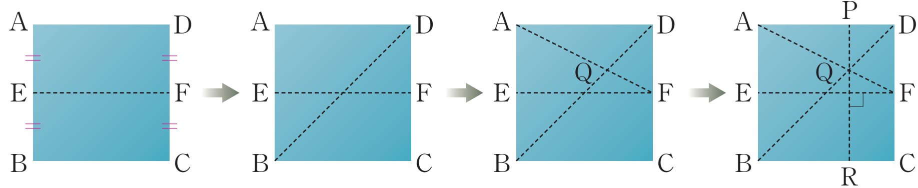
▶추론
의사소통
문제 해결

수직선 위의 서로 다른 두 점 A, B에 대하여 $m=n$ $(m>0,\ n>0)$일 때, 선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점이 존재하지 않는 이유를 설명하여 보자.

좌표평면 위에서 선분을 내분하는 점과 외분하는 점을 어떻게 구하는가?

탐구 활동 **직사각형 모양의 종이 ABCD를 다음 순서대로 접어 보고, 물음에 답하여 보자.**

❶ 선분 AD와 선분 BC가 일치하도록 반으로 접어서 점 E와 점 F를 찾는다.
❷ 대각선 BD를 접는다.
❸ 대각선 AF를 접어서 선분 AF와 선분 BD가 만나는 점을 점 Q라고 한다.
❹ 접는 선이 점 Q를 지나고, 선분 EF와 수직이 되도록 접어서 점 P와 점 R를 찾는다.

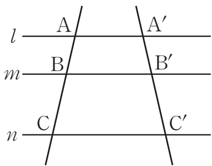


1. 삼각형 QAB와 삼각형 QFD의 닮음비를 구하여 보자.

2. **1**을 이용하여 두 선분 AP, PD의 길이의 비를 구하여 보자.

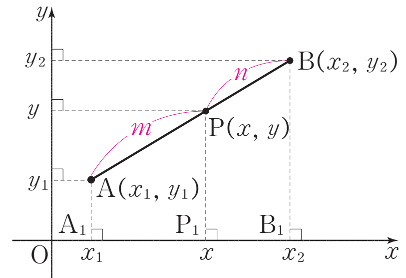
좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표 (x, y)를 구하여 보자.

중② 평행선 사이에 있는 선분의 길이의 비



$l /\!/ m /\!/ n$일 때
$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{A'B'}:\overline{B'C'}$

오른쪽 그림과 같이 점 A, B, P에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A_1, B_1, P_1이라고 하면



$$A_1(x_1,\ 0),\ B_1(x_2,\ 0),\ P_1(x,\ 0)$$

이고

$$\overline{AP}:\overline{PB}=\overline{A_1P_1}:\overline{P_1B_1}=m:n$$

이다.

이때 점 P_1은 선분 A_1B_1을 $m:n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점이므로

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$$

이다. y축 위에서도 같은 방법으로 생각하면

$$y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}$$

이다. 따라서 선분 AB를 $m:n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

이다.

특히 선분 AB의 중점 M의 좌표는 $m=n$인 경우이므로

$$\mathrm{M}\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

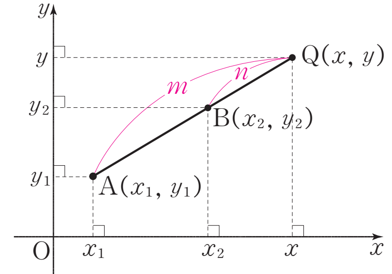
이다.

좌표평면에서도 선분 AB를 $m:n$으로 외분할 때, $m=n$이면 외분하는 점이 존재하지 않는다.

마찬가지 방법으로 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,$ $n>0,$ $m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 좌표 $(x,\ y)$를 구하면

$$\mathrm{Q}\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$$

이다.



이상을 정리하면 다음과 같다.

좌표평면 위의 선분을 내분하는 점과 외분하는 점의 좌표

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P와 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\mathrm{P}\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

$$\mathrm{Q}\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)\ (\text{단, } m\neq n)$$

특히 선분 AB의 중점 M의 좌표는 $\mathrm{M}\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

예제 02

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(1,\ -2)$, $\mathrm{B}(4,\ 4)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 P와 외분하는 점 Q의 좌표를 각각 구하여라.

풀이 점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라고 하면

$$x_1=\frac{2\times4+1\times1}{2+1}=3,\ y_1=\frac{2\times4+1\times(-2)}{2+1}=2$$

이므로 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}(3,\ 2)$

점 Q의 좌표를 $(x_2,\ y_2)$라고 하면

$$x_2=\frac{2\times4-1\times1}{2-1}=7,\ y_2=\frac{2\times4-1\times(-2)}{2-1}=10$$

이므로 점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}(7,\ 10)$

답 $\mathrm{P}(3,\ 2)$, $\mathrm{Q}(7,\ 10)$

문제 3 다음 두 점 A, B에 대하여 선분 AB를 5 : 3으로 내분하는 점 P와 외분하는 점 Q, 선분 AB의 중점 M의 좌표를 각각 구하여라.

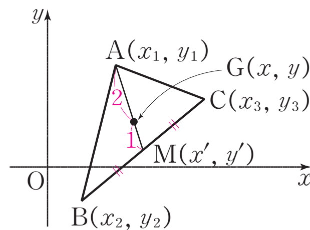
(1) A$(1,\ -3)$, B$(9,\ 5)$　　　(2) A$(4,\ 3)$, B$(-2,\ 3)$

예제 03

세 점 A$(x_1,\ y_1)$, B$(x_2,\ y_2)$, C$(x_3,\ y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표를 구하여라.

풀이 변 BC의 중점을 M$(x',\ y')$이라고 하면

$$x'=\frac{x_2+x_3}{2},\ y'=\frac{y_2+y_3}{2}$$



삼각형 ABC의 무게중심 G$(x,\ y)$는 중선 AM을 2 : 1로 내분하므로

$$x=\frac{2\times x'+1\times x_1}{2+1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

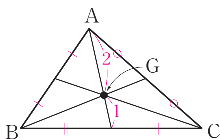
$$y=\frac{2\times y'+1\times y_1}{2+1}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$\mathrm{G}\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

답 $\mathrm{G}\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

중② 삼각형의 세 중선은 한 점(무게중심)에서 만나고, 이 점은 세 중선의 길이를 꼭짓점으로부터 각각 2 : 1로 내분한다.



문제 4 다음 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표를 구하여라.

(1) A$(-1,\ -2)$, B$(2,\ 5)$, C$(5,\ 3)$　　　(2) A$(0,\ 0)$, B$(-2,\ 7)$, C$(5,\ 2)$

발전 **문제 5** 세 점 A$(4,\ 1)$, B$(2,\ 3)$, C$(-6,\ 5)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA의 중점을 각각 D, E, F라고 할 때, 삼각형 DEF의 무게중심 G의 좌표를 구하여라.

사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

삼각형 ABC의 두 꼭짓점의 좌표가 A$(x_1,\ y_1)$, B$(x_2,\ y_2)$이고, 무게중심의 좌표가 G$(0,\ 0)$일 때, 꼭짓점 C의 좌표를 구하는 방법에 대하여 설명하여 보자.

[해답 p.227]

중단원 기초

수준별 학습

1 다음 두 점 A, B 사이의 거리를 구하여라.

(1) A(2), B(5) (2) A(4), B(−5)

(3) A(−1), B(4) (4) A(−7), B(3)

01 두 점 사이의 거리
수직선 위의 두 점 사이의 거리

2 다음 두 점 A, B 사이의 거리를 구하여라.

(1) A(4, 1), B(2, 1) (2) A(−2, −3), B(−2, 1)

(3) A(1, 3), B(3, 1) (4) A(0, 0), B(−5, 2)

01 두 점 사이의 거리
좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

3 두 점 A(−6), B(8)에 대하여 다음 점의 좌표를 구하여라.

(1) 선분 AB를 4 : 3으로 내분하는 점 P

(2) 선분 AB를 3 : 1로 외분하는 점 Q

(3) 선분 AB의 중점 M

02 선분의 내분과 외분
수직선 위의 선분의 내분과 외분

4 두 점 A(3, 4), B(−2, −1)에 대하여 다음 점의 좌표를 구하여라.

(1) 선분 AB를 1 : 4로 내분하는 점 P

(2) 선분 AB를 3 : 2로 내분하는 점 Q

(3) 선분 AB의 중점 M

02 선분의 내분과 외분
좌표평면 위의 선분의 내분

5 두 점 A(−2, −3), B(1, −5)에 대하여 다음 점의 좌표를 구하여라.

(1) 선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점 P

(2) 선분 AB를 3 : 5로 외분하는 점 Q

02 선분의 내분과 외분
좌표평면 위의 선분의 외분

[해답 p.227]

중단원 기본

수준별 학습

1 두 점 A$(a,\ 6)$, B$(-5,\ -2)$ 사이의 거리가 10이 되도록 하는 a의 값을 모두 구하여라.

01 두 점 사이의 거리
좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

2 세 점 A$(2,\ -2)$, B$(7,\ -3)$, C$(4,\ -5)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 말하여라.

01 두 점 사이의 거리
좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

3 두 점 A$(a,\ 2)$, B$(-1,\ b)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점의 좌표가 $(3,\ 5)$일 때, a, b의 값을 구하여라.

02 선분의 내분과 외분
좌표평면 위의 선분의 외분

4 네 점 A$(a,\ -1)$, B$(2,\ b)$, C$(3,\ 6)$, D$(5,\ 2)$를 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD가 평행사변형일 때, a, b의 값을 구하여라.

02 선분의 내분과 외분
좌표평면 위의 선분의 중점

5 점 A의 좌표가 $(2,\ 4)$인 삼각형 ABC에 대하여 선분 BC의 중점 M의 좌표가 $(-1,\ -5)$일 때, 무게중심 G의 좌표를 구하여라.

02 선분의 내분과 외분
삼각형의 무게중심

1 세 점 A$(0,\ 0)$, B$(2,\ 4)$, C$(3,\ 3)$에 대하여

$$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$$

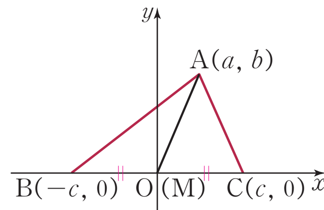
를 만족시키는 점 P의 좌표를 구하여라.

01 두 점 사이의 거리

좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

2 삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라고 할 때, 오른쪽 그림을 이용하여 다음이 성립함을 보여라.

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$$

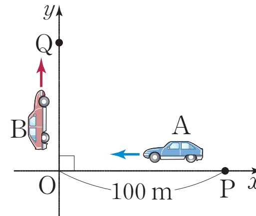


01 두 점 사이의 거리

좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

3 오른쪽 그림과 같이 수직으로 만나는 두 도로가 있다. 자동차 A는 O 지점에서 100 m 떨어진 P 지점에서 출발하여 O 지점의 방향으로 1초에 10 m의 속력으로 달리고, 자동차 B는 O 지점에서 출발하여 Q 지점의 방향으로 1초에 20 m의 속력으로 달린다. 두 자동차 A, B가 동시에 출발할 때, 두 자동차 사이의 거리의 최솟값을 구하여라.

(단, 자동차의 크기는 무시한다.)



01 두 점 사이의 거리

좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

4 두 점 A$(3,\ -2)$, B$(-2,\ 6)$에 대하여 선분 AB를 $t:(1-t)$로 내분하는 점이 제 1 사분면에 속할 때, 실수 t값의 범위를 구하여라.

02 선분의 내분과 외분

좌표평면 위의 선분의 내분

5 두 점 A$(0,\ 3)$, B$(6,\ 0)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 P, $3:1$로 외분하는 점을 Q라고 할 때, 삼각형 OPQ의 넓이를 구하여라.

(단, O는 원점이다.)

02 선분의 내분과 외분

좌표평면 위의 선분의 내분과 외분

2 직선의 방정식



지구는 점점 뜨거워지고 있다.

기후 변화에 관한 정부 간 협의체인 IPCC가 발표한 제4차 보고서에 따르면 지난 100년 동안 지구의 평균 기온은 0.74 ℃ 상승하였다고 한다. 특히 최근 50년 동안 지구의 평균 기온은 10년마다 0.13 ℃씩 올랐으며 이 상승률은 지난 100년 동안 추세의 2.3배에 해당한다고 한다. 지구 온난화의 가장 큰 원인은 온실가스인데, 이 온실가스의 배출을 줄이기 위한 국제 사회의 노력이 계속되고 있다.



단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 150쪽

해마다 변하는 지구의 평균 기온 변화를 어떻게 나타낼 수 있을까?

01 직선의 방정식

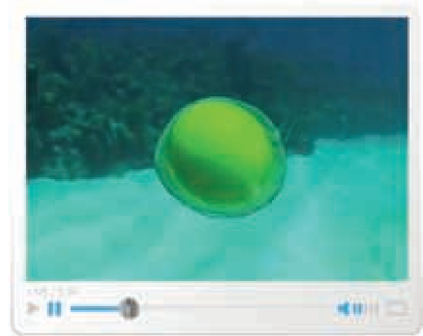
● 여러 가지 직선의 방정식을 구할 수 있다.

한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식을 어떻게 구하는가?

생각 열기

바닷속 수압

2011년 미국 버뮤다 해양과학연구소의 한 과학자는 수심 20 m 바닷속에서 계란을 깨는 실험 장면을 담은 동영상을 공개하였다. 깨진 계란은 바닷속 수압 때문에 투명한 흰자가 노른자를 감싼 채로 원형의 모양을 유지하였으며, 마치 물속을 둥둥 헤엄쳐 다니는 듯하였다.



탐구 활동

어느 해수면에서의 수압은 1.05 kg/cm²이고, 수면 아래로 1 m 내려갈 때마다 수압이 0.10 kg/cm²씩 증가한다고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 수심 x m에서의 수압이 y kg/cm²일 때, y를 x에 대한 식으로 나타내어 보자.
2. 수압이 10.5 kg/cm²인 지점의 수심을 구하여 보자.
3. 수심이 20 m에서 30 m로 변할 때와 90 m에서 100 m로 변할 때의 수압의 차이를 비교하여 보자.

중② 기울기가 m이고, y절편이 b인 직선의 방정식은 $y=mx+b$이다.

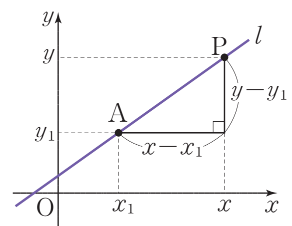
중② (기울기)$=\dfrac{(y\text{값의 증가량})}{(x\text{값의 증가량})}$

좌표평면 위의 한 점 $A(x_1,\ y_1)$을 지나고, 기울기가 m인 직선 l의 방정식을 구하여 보자.

점 $A(x_1,\ y_1)$이 아닌 직선 l 위의 임의의 점을 $P(x,\ y)$라고 하면 직선 l의 기울기 m은

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

이다.



이것의 양변에 $x-x_1$을 곱하면

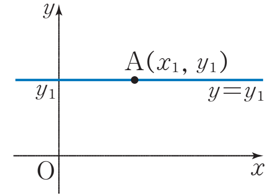
$$y-y_1=m(x-x_1) \qquad \cdots\cdots ①$$

이다. 그런데 $P(x,\ y)$가 $A(x_1,\ y_1)$과 일치할 때에도 방정식 ①이 성립하므로 이것이 구하는 직선 l의 방정식이다.

특히 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고, x축에 평행한 직선의 방정식은 직선의 기울기가 0이므로

$$y-y_1=0(x-x_1)$$

이다. 즉, $y=y_1$이다.



x축의 방정식은 $y=0$이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식

점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고, 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

보기 (1) 점 $(3,\ 4)$를 지나고, 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y-4=2(x-3),\ y=2x-2$$

(2) 점 $(-1,\ 2)$를 지나고, 기울기가 0인 직선의 방정식은

$$y-2=0(x+1),\ y=2$$

문제 1 다음 직선의 방정식을 구하여라.

(1) 점 $(1,\ 3)$을 지나고, 기울기가 -3인 직선

(2) x절편이 -1이고, 기울기가 2인 직선

(3) 점 $(-2,\ 1)$을 지나고, x축에 평행한 직선

두 점을 지나는 직선의 방정식을 어떻게 구하는가?

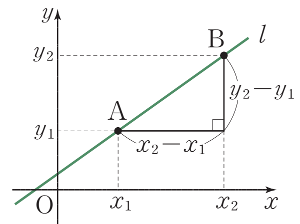
좌표평면 위의 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선 l의 방정식을 구하여 보자.

(i) $x_1\neq x_2$일 때

직선 l의 기울기 m은

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

이고, 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나므로 직선 l의 방정식은 다음과 같다.



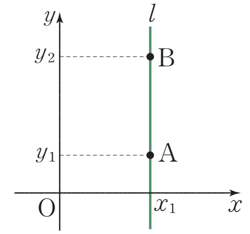
$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

특히 $y_1=y_2$이면 직선의 방정식은 $y=y_1$이다.

직선 $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$은 직선 $y-y_1=m(x-x_1)$에 $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$을 대입한 것이다.

(ii) $x_1=x_2$일 때

직선 l은 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고, y축에 평행하므로 직선 l 위의 모든 점에 대하여 x좌표는 항상 x_1이다. 따라서 직선 l의 방정식은 다음과 같다.



$$x=x_1$$

y축의 방정식은 $x=0$이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

두 점을 지나는 직선의 방정식

서로 다른 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식은

(1) $x_1\neq x_2$일 때 $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

(2) $x_1=x_2$일 때 $x=x_1$

보기 (1) 두 점 $(2,\ 1)$, $(4,\ 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=\frac{5-1}{4-2}(x-2),\ y=2x-3$$

(2) 두 점 $(1,\ -2)$, $(1,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은 두 점의 x좌표가 서로 같으므로

$$x=1$$

문제 2 다음 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

(1) $(-2,\ 1)$, $(1,\ 4)$　　(2) $(1,\ 3)$, $(4,\ 7)$

(3) $(2,\ -2)$, $(4,\ -2)$　　(4) $(3,\ -1)$, $(3,\ 4)$

사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

x절편이 a, y절편이 b $(a\neq 0,\ b\neq 0)$인 직선의 방정식은 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$과 같이 나타낼 수 있음을 설명하여 보자.

두 직선의 방정식 $y=2x+1$, $x=1$은 각각 일차방정식

$$2x-y+1=0,\ x-1=0$$

과 같이 나타낼 수 있다.

이와 같이 일반적으로 직선의 방정식은 모두 x, y에 대한 일차방정식

$$ax+by+c=0\ (a\neq 0\ \text{또는}\ b\neq 0)$$

의 꼴로 나타낼 수 있다.

거꾸로 x, y에 대한 일차방정식

$$ax+by+c=0 \ (a\neq0 \text{ 또는 } b\neq0) \qquad \cdots\cdots ①$$

의 그래프는 직선이 됨을 알아보자.

(i) $a\neq0$, $b\neq0$일 때, 일차방정식 ①은 일차함수

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

의 꼴로 변형된다. 이것은 기울기가 $-\frac{a}{b}$이고, y절편이 $-\frac{c}{b}$인 직선을 나타낸다.

● 방정식 $x=m$의 그래프

(ii) $a\neq0$, $b=0$일 때, 일차방정식 ①은 $ax+c=0$이다. 그런데 $a\neq0$이므로

$$x=-\frac{c}{a}$$

의 꼴로 변형된다. 이것은 x절편이 $-\frac{c}{a}$이고, y축에 평행한 직선을 나타낸다.

● 방정식 $y=n$의 그래프

(iii) $a=0$, $b\neq0$일 때, 일차방정식 ①은 $by+c=0$이다. 그런데 $b\neq0$이므로

$$y=-\frac{c}{b}$$

의 꼴로 변형된다. 이것은 y절편이 $-\frac{c}{b}$이고, x축에 평행한 직선을 나타낸다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 x, y에 대한 일차방정식 $ax+by+c=0$ $(a\neq0$ 또는 $b\neq0)$의 그래프는 항상 직선임을 알 수 있다.

보기

(1) 일차방정식 $2x-y+5=0$은 일차함수 $y=2x+5$로 변형되므로 기울기가 2이고, y절편이 5인 직선을 나타낸다.

(2) 일차방정식 $2x+5=0$은 $x=-\frac{5}{2}$로 변형되므로 x절편이 $-\frac{5}{2}$이고, y축에 평행한 직선을 나타낸다.

(3) 일차방정식 $-y+5=0$은 $y=5$로 변형되므로 y절편이 5이고, x축에 평행한 직선을 나타낸다.

문제 3 다음 일차방정식의 그래프를 그려라.

(1) $3x-y+2=0$ (2) $2x+3y+6=0$

(3) $2x-8=0$ (4) $3y+9=0$

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

x년도의 지구의 평균 기온을 y ℃라고 할 때, 최근 몇 년간 x, y에 대한 관계식을 그래프로 나타내면 직선이 된다고 하자. 2000년의 평균 기온은 10.5 ℃, 2010년의 평균 기온은 10.7 ℃라고 할 때, 이 직선의 방정식을 구하여라.

02 두 직선의 평행과 수직

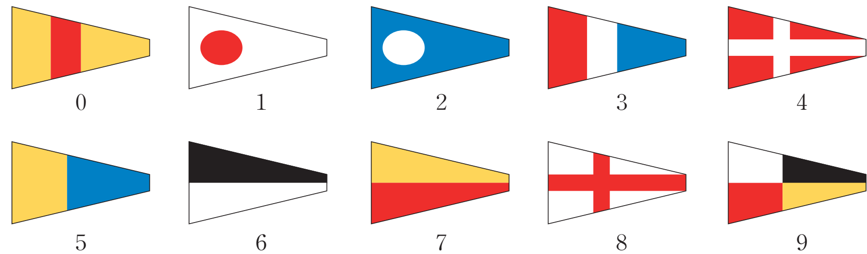
- 두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 이해한다.
- 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.

두 직선이 평행하기 위한 조건은 무엇인가?

생각 열기

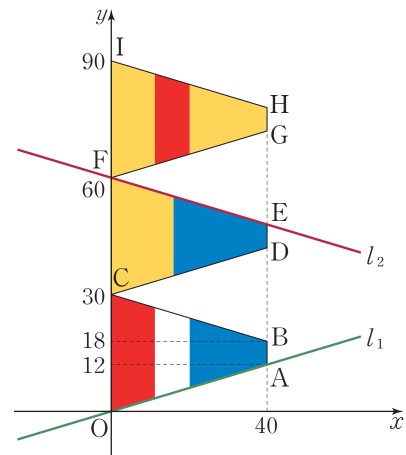
국제신호기

국제신호기는 세계 공통 신호법으로 규정되어 선박과 선박 또는 선박과 육지 사이에 통신을 주고받을 때 사용하는 기를 말한다. 다음 그림은 국제신호기의 한 종류인 숫자 0부터 9까지의 숫자기이다.



탐구 활동

오른쪽 그림은 숫자 0, 5, 3을 나타내는 국제신호기를 좌표평면 위에 올려놓은 것이다. 세 국제신호기가 합동인 등변사다리꼴일 때, 다음 물음에 답하여 보자.



1. 직선 l_1과 평행한 선분을 모두 찾아보자.
2. 직선 l_1의 기울기를 구하여 보자.
3. 직선 l_2와 평행한 선분을 모두 찾아보자.
4. 직선 l_2의 기울기를 구하여 보자.

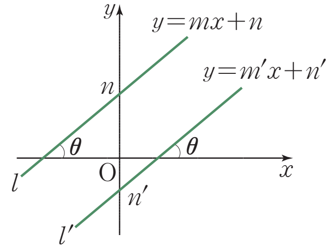
중① 평면에서 두 직선의 위치 관계
(i) 한 점에서 만난다.
(ii) 평행하다.
(iii) 일치한다.

좌표평면 위에서 두 직선

$$l: y=mx+n, \quad l': y=m'x+n'$$

이 평행할 조건을 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 두 직선 l, l'이 평행하면 두 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 서로 같고, y절편은 서로 다르다. 즉, 기울기는 같고, y절편은 다르므로



$$m=m',\ n\neq n'$$

이다. 거꾸로 $m=m'$, $n\neq n'$이면 두 직선 l, l'은 평행하다.

한편 두 직선 l, l'이 일치하면 기울기와 y절편이 각각 같으므로 $m=m'$, $n=n'$이다. 거꾸로 $m=m'$, $n=n'$이면 두 직선 l, l'은 일치한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

두 직선의 평행과 일치

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$에 대하여

(1) 두 직선이 평행하면 $m=m'$, $n\neq n'$이다. 또 $m=m'$, $n\neq n'$이면 두 직선은 평행하다.

(2) 두 직선이 일치하면 $m=m'$, $n=n'$이다. 또 $m=m'$, $n=n'$이면 두 직선은 일치한다.

보기 (1) 두 직선 $y=2x-1$, $y=2x+1$은 평행하다.

(2) 두 직선 $y=-x+2$, $x+y-2=0$은 일치한다.

문제 1 보기 중에서 다음을 만족시키는 직선을 모두 찾아라.

보기

㉠ $y=-3x+1$	㉡ $y=3x-4$	㉢ $3x+y-7=0$
㉣ $y=\frac{1}{5}x+1$	㉤ $x-5y+3=0$	㉥ $x+3y-6=0$

(1) 직선 $y=-3x-1$과 평행한 직선

(2) 직선 $x-5y+5=0$과 일치하는 직선

예제 01 점 $(-3,\ 1)$을 지나고, 직선 $y=2x+1$에 평행한 직선의 방정식을 구하여라.

● 두 직선이 평행하면 두 직선의 기울기는 같다.

풀이 구하는 직선은 기울기가 2이고, 점 $(-3,\ 1)$을 지나므로

$$y-1=2(x+3),\ y=2x+7$$

답 $y=2x+7$

문제 2 다음 직선의 방정식을 구하여라.

(1) 점 $(2,\ 5)$를 지나고, 직선 $y=x-5$에 평행한 직선

(2) 점 $(-1,\ 2)$를 지나고, 직선 $3x-2y+4=0$에 평행한 직선

사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$이 평행하면 등식 $\dfrac{a'}{a}=\dfrac{b'}{b}\neq\dfrac{c'}{c}$이 성립함을 설명하여 보자. (단, $abc\neq0$, $a'b'c'\neq0$)

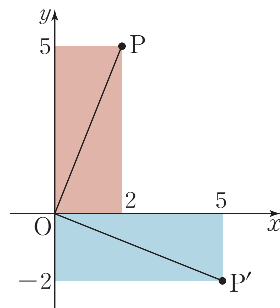
두 직선이 수직이기 위한 조건은 무엇인가?

탐구 활동

오른쪽 그림과 같이 합동인 두 직사각형을 축에 접하도록 놓았을 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 두 직사각형의 대각선 OP, OP′이 이루는 각의 크기는 얼마인가?

2. 두 직사각형의 대각선 OP, OP′의 기울기를 각각 구하고, 그 곱을 구하여 보자.



좌표평면 위에서 두 직선

$$l: y=mx+n,\ \ l': y=m'x+n'$$

이 수직일 조건을 알아보자.

두 직선 l, l'이 수직이면, 두 직선 l, l'에 각각 평행하고 원점을 지나는 두 직선

$$l_1: y=mx,\ \ l_1': y=m'x$$

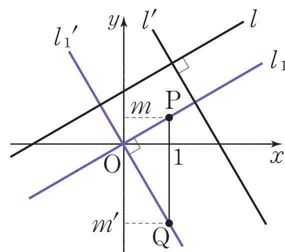
가 수직이다.

따라서 두 직선 l, l'이 수직일 조건은 l_1, l_1'이 수직일 조건과 같다.

오른쪽 그림과 같이 직선 $x=1$과 두 직선 l_1, l_1'의 교점을 각각 P, Q라고 하면 $\mathrm{P}(1,\ m)$, $\mathrm{Q}(1,\ m')$이고, 삼각형 OPQ는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{OP}}^2+\overline{\mathrm{OQ}}^2=\overline{\mathrm{PQ}}^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

이다.



두 점
$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$
사이의 거리는
$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
이다.

여기서

$$\overline{OP}^2=1+m^2,\ \overline{OQ}^2=1+m'^2,\ \overline{PQ}^2=(m-m')^2$$

이므로 이것을 ①에 대입하면

$$(1+m^2)+(1+m'^2)=(m-m')^2$$

이다. 이것을 정리하면

$$mm'=-1$$

이다. 거꾸로 $mm'=-1$이면 ①이 성립하므로 삼각형 OPQ는 직각삼각형이다. 즉, $\overline{OP}\perp\overline{OQ}$이므로 두 직선 l_1, l_1'은 수직이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

두 직선의 수직

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$에 대하여 두 직선이 수직이면 $mm'=-1$이다.
또 $mm'=-1$이면 두 직선은 수직이다.

보기 두 직선 $y=2x+1$과 $y=-\frac{1}{2}x+1$은 기울기의 곱이 $2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$이므로 서로 수직이다.

예제 02 점 $(3,\ 1)$을 지나고, 직선 $y=2x+5$에 수직인 직선의 방정식을 구하여라.

풀이 직선 $y=2x+5$에 수직인 직선의 기울기를 m이라고 하면

$$2m=-1,\ m=-\frac{1}{2}$$

구하는 직선은 점 $(3,\ 1)$을 지나므로 $y-1=-\frac{1}{2}(x-3)$, $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

답 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

문제 3 점 $(2,\ 3)$을 지나고, 다음 직선에 수직인 직선의 방정식을 구하여라.

(1) $y=\frac{1}{2}x-3$　　　(2) $3x+y+2=0$

발전 **문제 4** 두 점 $A(1,\ 4)$, $B(5,\ 2)$에 대하여 선분 AB의 수직이등분선의 방정식을 구하여라.

사고력 기르기

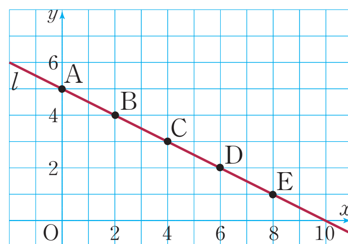
▶추론
의사소통
문제 해결

두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$이 수직이면 등식 $aa'+bb'=0$이 성립함을 설명하여 보자. (단, $ab\neq0$, $a'b'\neq0$)

점과 직선 사이의 거리를 어떻게 구하는가?

탐구 활동

오른쪽 그림과 같이 직선 l: $x+2y=10$ 위에 점 A, B, C, D, E가 있다. 다음 물음에 답하여 보자.



1. 점 A, B, C, D, E의 좌표와 원점 O까지의 거리를 각각 구하고, 이 중에서 원점 O까지의 거리가 가장 가까운 점은 어느 것인지 알아보자.

2. **1**에서 구한 점과 원점을 지나는 직선을 m이라고 할 때, 두 직선 l, m의 기울기 사이의 관계를 말하여 보자.

3. **1**에서 구한 점이 직선 l 위의 모든 점 중에서 원점 O까지의 거리가 가장 가까운 점이라고 말할 수 있는가?

● 점 P와 직선 l 사이의 거리는 점 P와 직선 l 위의 임의의 점 Q 사이의 거리 중에서 최솟값과 같다.

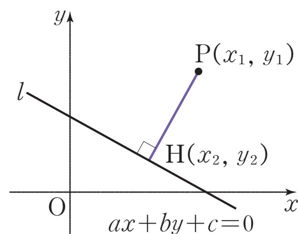
한 점 P와 한 직선 l 사이의 거리는 점 P에서 직선 l에 내린 수선의 길이를 말한다.

좌표평면 위에서 한 점 $P(x_1, y_1)$과 점 P를 지나지 않는 직선

$$l: ax+by+c=0 \ (a\neq0 \text{ 또는 } b\neq0)$$

사이의 거리를 구하여 보자.

(i) $a\neq0$, $b\neq0$일 때



점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 $H(x_2, y_2)$라고 하면 직선 l의 기울기는 $-\frac{a}{b}$이므로 직선 PH는 기울기가 $\frac{b}{a}$이고, 점 $P(x_1, y_1)$을 지난다.

따라서 직선 PH의 방정식은

$$y-y_1=\frac{b}{a}(x-x_1)$$

이다.

이때 점 H는 직선 l과 직선 PH의 교점이므로 다음 연립방정식이 성립한다.

$$\begin{cases} ax_2+by_2+c=0 & \cdots\cdots ① \\ y_2-y_1=\dfrac{b}{a}(x_2-x_1) & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

②의 양변에 a를 곱하여 정리하면

$$bx_2-ay_2-bx_1+ay_1=0 \quad \cdots\cdots ③$$

이다. ①$\times a+$③$\times b$를 하여 정리하면

$$x_2=\frac{b^2x_1-aby_1-ac}{a^2+b^2}$$

이고, 양변에서 x_1을 뺀 후 우변을 정리하면

$$x_2-x_1=\frac{-a(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2} \quad \cdots\cdots ④$$

이다. ④를 ②에 대입하면

$$y_2-y_1=\frac{-b(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}$$

이다.

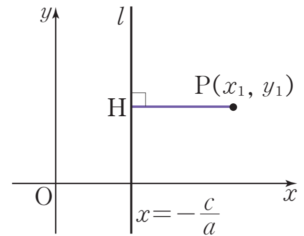
따라서 구하는 선분 PH의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PH}}&=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\\&=\sqrt{\frac{(a^2+b^2)(ax_1+by_1+c)^2}{(a^2+b^2)^2}}\\&=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \cdots\cdots ⑤\end{aligned}$$

이다.

임의의 실수 a에 대하여 $\sqrt{a^2}=|a|$

(ii) $a\neq0$, $b=0$일 때 (직선이 y축과 평행한 경우)

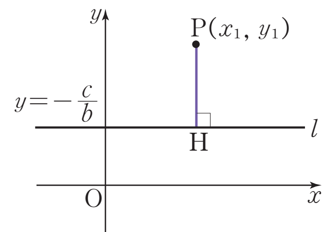


직선의 방정식은 $x=-\dfrac{c}{a}$이므로

$$\overline{\mathrm{PH}}=\left|x_1-\left(-\frac{c}{a}\right)\right|=\left|\frac{ax_1+c}{a}\right|$$

이다. 이것은 ⑤에 $b=0$을 대입한 것과 같다.

(iii) $a=0$, $b\neq0$일 때 (직선이 x축과 평행한 경우)



직선의 방정식은 $y=-\dfrac{c}{b}$이므로

$$\overline{\mathrm{PH}}=\left|y_1-\left(-\frac{c}{b}\right)\right|=\left|\frac{by_1+c}{b}\right|$$

이다. 이것은 ⑤에 $a=0$을 대입한 것과 같다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

원점 $(0, 0)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

점과 직선 사이의 거리

점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

보기 점 $(4, -1)$과 직선 $3x-4y+4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3\times4-4\times(-1)+4|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{20}{5}=4$$

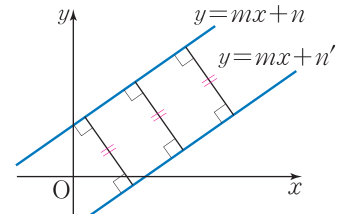
문제 5 다음 점과 직선 사이의 거리를 구하여라.

(1) $(3, 2)$, $x+2y+3=0$
(2) $(0, 0)$, $4x-3y+10=0$
(3) $(-1, -2)$, $3x-y-4=0$
(4) $(-4, 1)$, $x+2=0$

점과 직선 사이의 거리를 이용하여 평행한 두 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.

두 직선이 평행하면 한 직선 위의 임의의 점에서 다른 직선에 내린 수선의 길이는 항상 일정하다.

따라서 평행한 두 직선 사이의 거리는 직선 위의 한 점과 다른 직선 사이의 거리이다.



예제 03 평행한 두 직선 $x-2y+2=0$과 $x-2y-6=0$ 사이의 거리를 구하여라.

풀이 두 직선이 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $x-2y+2=0$ 위의 한 점 $(0, 1)$과 직선 $x-2y-6=0$ 사이의 거리와 같다.

따라서 구하는 거리는 $\dfrac{|1\times0-2\times1-6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{5}}=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$이다.

답 $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$

문제 6 다음 평행한 두 직선 사이의 거리를 구하여라.

(1) $x-y+3=0$, $x-y+7=0$
(2) $5x-y-2=0$, $5x-y+8=0$

예제 04 점 $(2,\ 1)$을 지나고, 원점과의 거리가 1인 직선의 방정식을 구하여라.

풀이 구하는 직선의 기울기를 m이라고 하면 직선의 방정식은

$$y-1=m(x-2) \qquad \cdots\cdots①$$

우변을 전개하여 정리하면 $mx-y-2m+1=0$

원점과 직선 $mx-y-2m+1=0$ 사이의 거리가 1이므로

$$\frac{|-2m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=1$$

$$|-2m+1|=\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$4m^2-4m+1=m^2+1$$

$$3m^2-4m=0$$

$$m(3m-4)=0$$

따라서 $m=0$ 또는 $m=\frac{4}{3}$이다.

이것을 ①에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$$y=1 \text{ 또는 } y=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}$$

답 $y=1$ 또는 $y=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}$

문제 7 다음 직선의 방정식을 구하여라.

(1) 점 $(-1,\ -2)$를 지나고, 원점과의 거리가 2인 직선

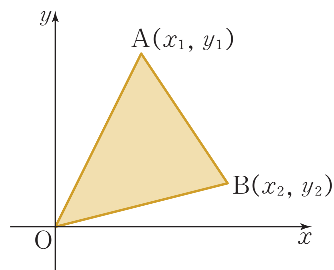
(2) 점 $(1,\ 2)$와의 거리가 $\sqrt{10}$이고, 기울기가 2인 직선

창의 up

세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 넓이를 S라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 점 O와 직선 AB 사이의 거리를 구하여라.

(2) $S=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$임을 보여라.



중단원 기초

1 다음 직선의 방정식을 구하여라.

(1) 점 $(3,\ -1)$을 지나고, 기울기가 3인 직선

(2) 점 $(-2,\ 4)$를 지나고, x축에 평행한 직선

01 직선의 방정식
한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식

2 다음 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

(1) $(-2,\ -3),\ (2,\ 5)$

(2) $(-1,\ 1),\ (5,\ 4)$

01 직선의 방정식
두 점을 지나는 직선의 방정식

3 두 직선 $y=\frac{1}{2}x+3$, $y=ax+1$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) 두 직선이 평행할 때, 상수 a의 값

(2) 두 직선이 수직일 때, 상수 a의 값

02 두 직선의 평행과 수직

4 다음 직선의 방정식을 구하여라.

(1) 점 $(1,\ 3)$을 지나고, 직선 $y=5x-3$에 평행한 직선

(2) 점 $(-2,\ 1)$을 지나고, 직선 $y=-3x+1$에 수직인 직선

02 두 직선의 평행과 수직

5 다음 점과 직선 사이의 거리를 구하여라.

(1) $(2,\ 3)$, $3x-y-4=0$

(2) $(0,\ 0)$, $x-2y+5=0$

02 두 직선의 평행과 수직
점과 직선 사이의 거리

[해답 p.229]

중단원 기본

수준별 학습

1 점 $(2,\ 2)$를 지나고 기울기가 -2인 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구하여라.

01 직선의 방정식
한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식

2 세 점 $\mathrm{A}(1,\ 9)$, $\mathrm{B}(a,\ 5)$, $\mathrm{C}(4,\ a)$가 한 직선 위에 있도록 하는 a의 값과 그때의 직선의 방정식을 각각 구하여라.

01 직선의 방정식
두 점을 지나는 직선의 방정식

3 두 직선 $x+y+1=0$과 $2x+3y+5=0$의 교점과 점 $(4,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

01 직선의 방정식
두 점을 지나는 직선의 방정식

4 두 직선 $3x+2y+5=0$과 $ax+by+1=0$이 수직으로 만날 때, 상수 a, b에 대하여 $\dfrac{a}{b}$의 값을 구하여라.

02 두 직선의 평행과 수직

5 평행한 두 직선 $2x+y-3=0$과 $2x+y+2=0$ 사이의 거리를 구하여라.

02 두 직선의 평행과 수직
두 직선 사이의 거리

[해답 p.229]

중단원 실력

1 직선 $y=m(x+1)+2$가 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 3)$, $\mathrm{B}(3,\ 0)$을 이은 선분 AB와 만날 때, 상수 m값의 범위를 구하여라.

01 직선의 방정식
두 점을 지나는 직선의 방정식

2 세 점 $\mathrm{A}(-3,\ -1)$, $\mathrm{B}(1,\ 6)$, $\mathrm{C}(5,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하고, 점 A를 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

01 직선의 방정식
두 점을 지나는 직선의 방정식

3 네 점 $\mathrm{A}(-3,\ 3)$, $\mathrm{B}(-1,\ -1)$, $\mathrm{C}(5,\ -1)$, $\mathrm{D}(5,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD가 있다. 사각형 ABCD의 내부의 점 P에 대하여

$$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}+\overline{\mathrm{CP}}+\overline{\mathrm{DP}}$$

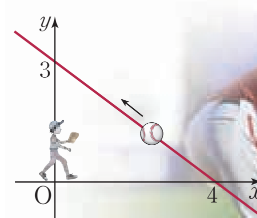
의 값이 최소가 되도록 하는 점 P의 좌표를 구하여라.

01 직선의 방정식
두 점을 지나는 직선의 방정식

4 두 직선 $2x+y+2=0$과 $x-2y+1=0$이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식을 구하여라.

02 두 직선의 평행과 수직
점과 직선 사이의 거리

5 야구 경기 중에 수비수의 옆으로 공이 직선으로 굴러가고 있다. 수비수의 위치를 원점으로 하여 좌표평면 위에 나타내었더니 공이 $(4,\ 0)$과 $(0,\ 3)$을 지난다. 공이 수비수에게 가장 가까이 왔을 때, 공과 수비수 사이의 거리는 얼마인지 구하여라.



02 두 직선의 평행과 수직
점과 직선 사이의 거리

3

원의 방정식

산업용 로봇이 인간을 대신한다.

컴퓨터의 통제에 의하여 일정한 공정 작업을 하는 공업용 기계를 산업용 로봇이라고 한다. 산업용 로봇은 1미터의 100만분의 1인 마이크로미터 단위의 작업이나 심해 및 우주 공간에서의 작업 등과 같이 인간이 하기 힘든 일에 쓰이고 있다. 또한 단조로운 반복 작업을 대신하거나 부주의로 생기기 쉬운 제품의 불량을 줄이는 일에도 이용된다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 172쪽

산업용 로봇은 다양한 원을 어떻게 그릴 수 있을까?

01 원의 방정식

● 원의 방정식을 구할 수 있다.

원의 방정식을 어떻게 구하는가?

생각 열기

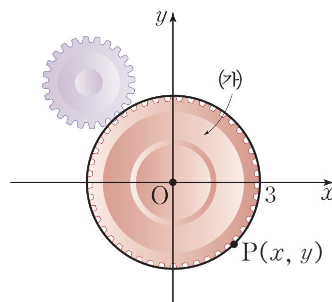
기어

기어란 톱니바퀴로 이루어진 기계 부품으로 2개 또는 그 이상의 축에 회전이나 동력을 전달하는 장치이다. 기어는 시계에 쓰이는 지름 1.5 mm 정도의 작은 것에서부터 선박용 감속 장치 등에 사용되는 수 m에 달하는 것까지 있으며, 차량 등을 비롯한 모든 종류의 기계에 이용된다.



탐구 활동

오른쪽 그림과 같이 톱니바퀴 (가)를 중심이 원점 O와 일치하도록 좌표평면 위에 올려놓았다. 이 톱니바퀴의 가장 바깥 부분을 지나는 원 위의 임의의 점을 $P(x, y)$라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.



1. 선분 OP의 길이는 얼마인가?
2. 선분 OP의 길이를 x, y에 대한 식으로 나타내어 보자.

좌표평면 위에서 한 점 $C(a, b)$를 중심으로 하고, 반지름의 길이가 r인 원을 나타내는 방정식을 구하여 보자.

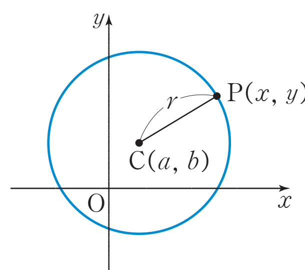
이 원 위의 임의의 점을 $P(x, y)$라고 하면 $\overline{CP}=r$이므로

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

이고, 이 식의 양변을 제곱하면

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

이다.



거꾸로 방정식 ①을 만족시키는 점 $P(x, y)$에 대하여 $\overline{CP}=r$이므로 점 $P(x, y)$는 이 원 위에 있다.

따라서 방정식 ①이 구하는 원의 방정식이다.

● 평면 위의 한 정점으로부터 일정한 거리에 있는 모든 점으로 이루어진 도형을 원이라고 한다. 이때 정점은 원의 중심이고, 원의 중심에서 원 위의 한 점을 이은 선분이 반지름이다.

● 방정식 ①을 중심이 $C(a, b)$이고, 반지름의 길이가 r인 원의 방정식이라고 한다.

특히 중심이 원점이고, 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$x^2+y^2=r^2$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

방정식 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 을 원의 방정식의 표준형이라고 한다.

원의 방정식

중심이 $C(a,\ b)$이고, 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

특히 중심이 원점이고, 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$x^2+y^2=r^2$$

보기 (1) 중심이 점 $(-3,\ 2)$이고, 반지름의 길이가 2인 원의 방정식은

$$(x+3)^2+(y-2)^2=2^2,\ (x+3)^2+(y-2)^2=4$$

(2) 중심이 원점이고, 반지름의 길이가 4인 원의 방정식은

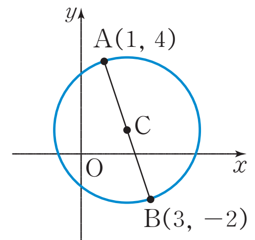
$$x^2+y^2=4^2,\ x^2+y^2=16$$

문제 1 다음 원의 방정식을 구하여라.

(1) 중심이 점 $(2,\ 5)$이고, 반지름의 길이가 3인 원

(2) 중심이 원점이고, 반지름의 길이가 5인 원

예제 01 두 점 $A(1,\ 4)$, $B(3,\ -2)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식을 구하여라.



풀이 구하는 원의 중심을 $C(a,\ b)$라고 하면 점 C는 선분 AB의 중점이므로 $a=\frac{1+3}{2}=2$, $b=\frac{4-2}{2}=1$이다. 즉,

$$C(2,\ 1)$$

이때 원의 반지름의 길이는

$$\overline{AC}=\sqrt{(2-1)^2+(1-4)^2}=\sqrt{10}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2+(y-1)^2=10$$

답 $(x-2)^2+(y-1)^2=10$

문제 2 다음 두 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식을 구하여라.

(1) $(0,\ 2)$, $(-2,\ 2)$　　(2) $(4,\ 0)$, $(0,\ 6)$

(3) $(-3,\ 1)$, $(1,\ 5)$　　(4) $(-5,\ -2)$, $(3,\ 4)$

원의 방정식 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$의 좌변을 전개하여 정리하면

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

이므로 $-2a=A$, $-2b=B$, $a^2+b^2-r^2=C$로 놓으면 위의 원의 방정식은

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0 \ (A,\ B,\ C\text{는 상수}) \quad \cdots\cdots ①$$

이 된다.

즉, 원의 방정식은 x^2, y^2의 계수가 같고, xy의 계수가 0인 x, y에 대한 이차방정식의 꼴로 나타낼 수 있다.

거꾸로 방정식 ①을 변형하면

$$\left(x^2+Ax+\frac{A^2}{4}\right)+\left(y^2+By+\frac{B^2}{4}\right)=\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-C$$

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4C}{4}$$

가 된다.

따라서 $A^2+B^2-4C>0$이면 방정식 ①은 중심이 점 $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right)$이고, 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$인 원을 나타낸다.

방정식
$x^2+y^2+Ax+By+C=0$
을 원의 방정식의 일반형이라고 한다. (단, $A^2+B^2-4C>0$)

참고 $A^2+B^2-4C=0$이면 방정식 ①은 한 점 $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right)$를 나타내고,
$A^2+B^2-4C<0$이면 방정식 ①을 만족시키는 점은 존재하지 않는다.

예제 02

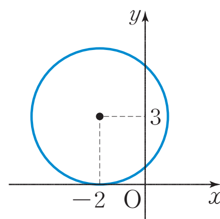
방정식 $x^2+y^2+4x-6y+4=0$은 어떤 도형을 나타내는지 말하여라.

풀이 주어진 방정식을 변형하면

$$x^2+4x+4+y^2-6y+9=9$$

$$(x+2)^2+(y-3)^2=3^2$$

따라서 주어진 방정식은 중심이 점 $(-2,\ 3)$이고, 반지름의 길이가 3인 원을 나타낸다.



답 중심이 점 $(-2,\ 3)$이고, 반지름의 길이가 3인 원

문제 3 다음 방정식은 어떤 도형을 나타내는지 말하여라.

(1) $x^2+y^2-2x-4y-4=0$

(2) $2x^2+2y^2+2x+6y+1=0$

발전

문제 4 다음 두 방정식이 모두 원을 나타낼 때, 실수 k값의 범위를 구하여라.

$$x^2+y^2-2x+k=0,\ x^2+y^2+4x-2y-k=0$$

예제 03 세 점 $(-2,\ -6)$, $(1,\ 3)$, $(5,\ 1)$을 지나는 원의 중심과 반지름의 길이를 구하여라.

세 점이 모두 일직선 위에 있지 않을 때, 그 세 점을 지나는 원은 단 하나로 정해진다.

풀이 구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라고 하면 이 원은 세 점 $(-2,\ -6)$, $(1,\ 3)$, $(5,\ 1)$을 지나므로

$$\begin{cases} 40-2A-6B+C=0 \\ 10+A+3B+C=0 \\ 26+5A+B+C=0 \end{cases}$$

이 연립방정식을 풀면 $A=-2$, $B=4$, $C=-20$이므로 구하는 원의 방정식은

$$x^2+y^2-2x+4y-20=0$$

이 방정식을 변형하면 $(x-1)^2+(y+2)^2=25$

따라서 이 방정식은 중심이 점 $(1,\ -2)$이고, 반지름의 길이가 5인 원을 나타낸다.

답 중심: $(1,\ -2)$, 반지름의 길이: 5

문제 5 다음 세 점을 지나는 원의 중심과 반지름의 길이를 구하여라.

(1) $(0,\ 0)$, $(4,\ -3)$, $(2,\ 1)$

(2) $(-1,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(6,\ 0)$

사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

두 점 $\mathrm{A}(-4,\ 0)$, $\mathrm{B}(-1,\ 0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}=2\overline{\mathrm{PB}}$를 만족시키는 점 P가 그리는 도형의 방정식을 구하여 보자.

02 원과 직선의 위치 관계

● 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다.

좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계는 어떠한가?

생각 열기

원 속의 원

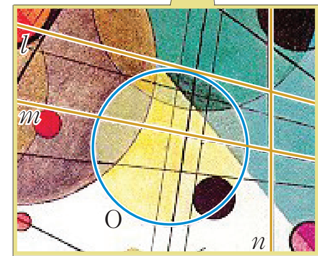
오른쪽 그림은 추상화의 창시자 칸딘스키(Kandinsky, W.; 1866~1944)의 '원 속의 원'이라는 작품이다. 작품 속의 원은 각양각색의 이미지를 생성하는 상징으로, 이 그림을 보고 사람들은 세포의 세계를 떠올리기도 하고, 곡예사의 공 타기나 비눗방울 놀이를 생각하기도 한다.



탐구 활동

오른쪽 그림은 생각 열기의 그림의 일부를 확대한 것이다. 그림을 보고 원 O와 세 직선 l, m, n에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 원 O와 두 점에서 만나는 직선은 무엇인가?
2. 원 O와 한 점에서 만나는 직선은 무엇인가?
3. 원 O와 만나지 않는 직선은 무엇인가?

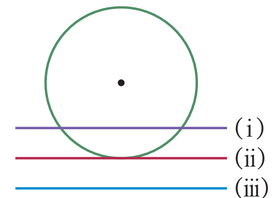


원과 직선의 위치 관계는 교점의 개수에 따라 다음 세 가지 경우가 있다.

(ⅰ) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(ⅱ) 한 점에서 만난다(접한다).

(ⅲ) 만나지 않는다.



이때 원과 직선이 만나는 경우는 서로 다른 두 점에서 만나는 경우와 한 점에서 만나는 경우의 두 가지이다.

중② 원과 직선이 한 점에서 만날 때, 직선은 원에 접한다고 하며, 그 직선을 원의 접선, 그 교점을 접점이라고 한다.

이제 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계에 대하여 알아보자.

원과 직선의 방정식이 각각

$$x^2+y^2=r^2 \quad \cdots\cdots ①$$

$$y=mx+n \quad \cdots\cdots ②$$

일 때, 이들의 교점의 좌표는 ①, ②를 연립하여 풀었을 때의 해이다.

②를 ①에 대입하면

$$x^2+(mx+n)^2=r^2$$

이고, 이 식을 정리하면

모든 실수 m에 대하여 $m^2+1>0$이므로 $m^2+1\neq0$

$$(m^2+1)x^2+2mnx+n^2-r^2=0 \qquad \cdots\cdots ③$$

이다.

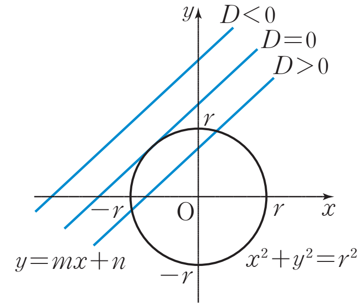
이 이차방정식의 해는 원과 직선의 교점의 x좌표이므로 이 이차방정식의 실근의 개수에 따라 원과 직선의 위치 관계가 결정된다.

따라서 ③의 판별식을 D라고 하면 D의 부호에 따라 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근, 중근, 허근을 가지므로 원 ①과 직선 ②의 위치 관계는 다음과 같다.

(i) $D>0$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.
　또 서로 다른 두 점에서 만나면 $D>0$이다.

(ii) $D=0$이면 한 점에서 만난다(접한다).
　또 한 점에서 만나면(접하면) $D=0$이다.

(iii) $D<0$이면 만나지 않는다.
　또 만나지 않으면 $D<0$이다.



예제 01 원 $x^2+y^2=10$과 직선 $y=x-2$의 위치 관계를 말하여라.

풀이 $y=x-2$를 $x^2+y^2=10$에 대입하면

$$x^2+(x-2)^2=10$$

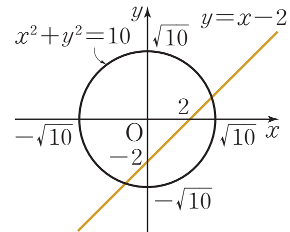
이 식을 정리하면

$$x^2-2x-3=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\times(-3)=4>0$$

따라서 주어진 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.



답 서로 다른 두 점에서 만난다.

문제 1 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

(1) $x^2+y^2=3$, $y=x+5$　　(2) $x^2+y^2=1$, $y=2x+2$

(3) $x^2+y^2=5$, $x-2y=5$　　(4) $x^2+(y-2)^2=2$, $x+y=4$

예제 02 원 $x^2+y^2=1$과 직선 $y=2x+k$가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 k값의 범위를 구하여라.

풀이 $y=2x+k$를 $x^2+y^2=1$에 대입하면 $x^2+(2x+k)^2=1$

$$5x^2+4kx+k^2-1=0 \quad \cdots\cdots①$$

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 ①의 판별식 D가 $D>0$이어야 하므로

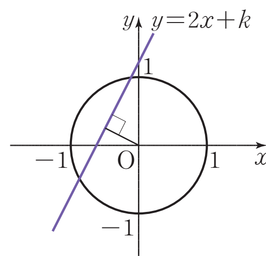
$\frac{D}{4}=(2k)^2-5\times(k^2-1)>0$에서 $k^2<5$

따라서 $-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$이다.

답 $-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$

점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 $\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

다른 풀이 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구하고, 이 거리와 원의 반지름의 길이를 비교함으로써 원과 직선의 위치 관계를 알 수 있다.



원의 반지름의 길이는 1이고, 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2\times0-1\times0+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $\frac{|k|}{\sqrt{5}}<1$이어야 한다.

즉, $|k|<\sqrt{5}$이므로 $-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$이다.

문제 2 원 $x^2+y^2=2$와 직선 $y=x+k$의 위치 관계가 다음과 같을 때, 실수 k의 값 또는 그 범위를 구하여라.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 한 점에서 만난다.

(3) 만나지 않는다.

발전

문제 3 좌표평면 위에 직선 $y=kx+2$와 두 원 C_1: $x^2+y^2=1$, C_2: $x^2+y^2=2$가 있다. 직선이 원 C_1과는 만나지 않고, 원 C_2와는 만날 때, 실수 k값의 범위를 구하여라.

사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

원 $x^2+y^2=r^2\,(r>0)$과 직선 $y=mx+n$의 위치 관계를 원의 중심과 직선 사이의 거리와 반지름의 길이 사이의 관계를 이용하여 식으로 나타내어 보자.

기울기가 주어진 원의 접선의 방정식을 어떻게 구하는가?

좌표평면 위에서 기울기가 주어지고 원에 접하는 접선의 방정식을 구하여 보자.

원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고, 기울기가 m인 접선의 방정식을

$$y=mx+n \qquad \cdots\cdots ①$$

으로 놓는다.

①을 원의 방정식 $x^2+y^2=r^2$에 대입하면

$$x^2+(mx+n)^2=r^2$$

이고, 이 식을 정리하면

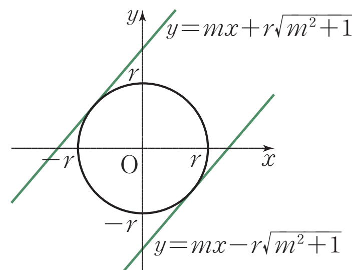
$$(m^2+1)x^2+2mnx+n^2-r^2=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

이다. ②의 판별식을 D라고 하면

$$D=(2mn)^2-4(m^2+1)(n^2-r^2)$$
$$=4\{(m^2+1)r^2-n^2\}$$

이고, 원과 직선이 접하면 $D=0$이므로

$$(m^2+1)r^2-n^2=0$$
$$n=\pm r\sqrt{m^2+1} \qquad \cdots\cdots ③$$



이다. ③을 ①에 대입하면

$$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$$

을 얻는다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

원의 접선의 방정식 [1]

원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고, 기울기가 m인 접선의 방정식은

$$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$$

보기 원 $x^2+y^2=4$에 접하고, 기울기가 3인 접선의 방정식은

$$y=3x\pm2\sqrt{3^2+1},\ y=3x\pm2\sqrt{10}$$

문제 4 원 $x^2+y^2=9$에 접하고, 기울기가 $-\sqrt{3}$인 접선의 방정식을 구하여라.

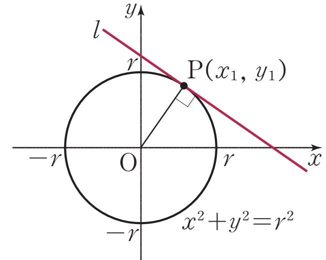
문제 5 원 $x^2+y^2=4$에 접하고, 직선 $2x-y+1=0$에 수직인 직선의 방정식을 구하여라.

한 점을 지나는 원의 접선의 방정식을 어떻게 구하는가?

좌표평면 위에서 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식을 구하여 보자.

(i) 점 P가 좌표축 위에 있지 않은 경우 $(x_1\neq 0, y_1\neq 0)$

직선 OP의 기울기는 $\frac{y_1}{x_1}$이고, 접선 l은 직선 OP에 수직이므로 접선 l의 기울기는 $-\frac{x_1}{y_1}$이다.



● 두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이 수직이면 $mm'=-1$

따라서 접선 l의 방정식은

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$$

이므로 이 식을 정리하면

$$x_1x+y_1y=x_1^2+y_1^2$$

이다. 그런데 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$은 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점이므로

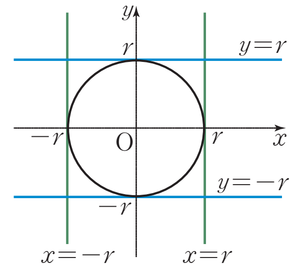
$$x_1^2+y_1^2=r^2$$

이다. 그러므로 구하는 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$x_1x+y_1y=r^2$$

(ii) 점 P가 좌표축 위에 있는 경우 $(x_1=0$ 또는 $y_1=0)$

점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$의 좌표와 접선의 방정식은 다음 표와 같다.



$\mathrm{P}(x_1, y_1)$	$(r, 0)$	$(-r, 0)$	$(0, r)$	$(0, -r)$
접선의 방정식	$x=r$	$x=-r$	$y=r$	$y=-r$

따라서 이 경우에도

$$x_1x+y_1y=r^2$$

이 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

원의 접선의 방정식 [2]

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=r^2$$

보기 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(2, 1)$에서의 접선의 방정식은

$$2\times x+1\times y=5,\ 2x+y=5$$

문제 6 다음 원 위의 점에서의 접선의 방정식을 구하여라.

(1) $x^2+y^2=10$, $(1,\ 3)$ (2) $x^2+y^2=25$, $(0,\ 5)$

예제 03

점 $\mathrm{A}(3,\ 1)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

● 주어진 점이 원 위의 점인지 아닌지를 먼저 판단한다.

풀이 접점을 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$이라고 하면 접선의 방정식은

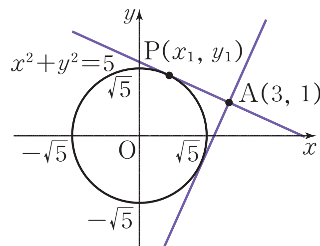
$$x_1x+y_1y=5 \quad \cdots\cdots①$$

이 접선이 점 $\mathrm{A}(3,\ 1)$을 지나므로

$$3x_1+y_1=5 \quad \cdots\cdots②$$

한편 접점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=5$ 위에 있으므로

$$x_1^2+y_1^2=5 \quad \cdots\cdots③$$



②, ③을 연립하여 풀면

$$\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x_1=2 \\ y_1=-1 \end{cases}$$

● 원의 외부에 있는 한 점에서 원에 그은 접선은 두 개이다.

이것을 ①에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$x+2y=5 \text{ 또는 } 2x-y=5$$

답 $x+2y=5$ 또는 $2x-y=5$

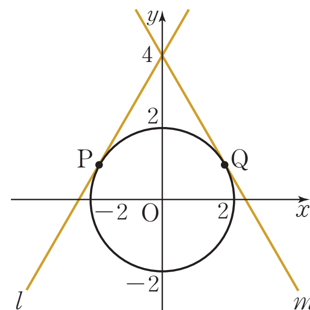
문제 7 점 $(1,\ 2)$에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

단원 과제



앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

산업용 로봇이 오른쪽 그림과 같은 두 직선 l, m에 동시에 접하는 원을 그리는 작업을 하고 있다. 이때 직선 l, m의 방정식과 접점 P, Q의 좌표를 구하여라.



중단원 기초

1 다음 원의 방정식을 구하여라.

01 원의 방정식

(1) 중심이 $(1,\ 2)$이고, 반지름의 길이가 3인 원

(2) 두 점 $(-2,\ 1)$, $(6,\ 7)$을 지름의 양 끝으로 하는 원

2 다음 방정식이 나타내는 원의 중심과 반지름의 길이를 구하여라.

01 원의 방정식

(1) $x^2+y^2+4x+3=0$

(2) $x^2+y^2-6x+2y+6=0$

3 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

02 원과 직선의 위치 관계

(1) $x^2+y^2=3,\ y=3x-5$

(2) $x^2+y^2=1,\ x+2y+3=0$

4 원 $x^2+y^2=4$에 접하고, 기울기가 -2인 접선의 방정식을 구하여라.

02 원과 직선의 위치 관계
원의 접선의 방정식

5 다음 원 위의 점에서의 접선의 방정식을 구하여라.

02 원과 직선의 위치 관계
원의 접선의 방정식

(1) $x^2+y^2=25,\ (4,\ -3)$

(2) $x^2+y^2=12,\ (-3,\ \sqrt{3})$

[해답 p.230]

중단원 기본

수준별 학습

1 원 $x^2+y^2+4x-10y+28=0$의 중심과 점 $(4, -1)$을 지름의 양 끝으로 하는 원의 방정식을 구하여라.

01 원의 방정식

2 방정식 $x^2+y^2-4kx-2ky+10k=0$이 원을 나타낼 때, 실수 k값의 범위를 구하여라.

01 원의 방정식
원이 되는 조건

3 원 $x^2+y^2=3$과 직선 $y=mx+2$가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 m값의 범위를 구하여라.

02 원과 직선의 위치 관계

4 직선 $y=2x-1$과 평행하고, 원 $x^2+y^2=9$에 접하는 직선의 방정식을 구하여라.

02 원과 직선의 위치 관계
원의 접선의 방정식

5 원점 O에서 원 $x^2+y^2-8x-4y+18=0$에 그은 두 접선의 기울기를 구하여라.

02 원과 직선의 위치 관계
원의 접선의 방정식

중단원 실력

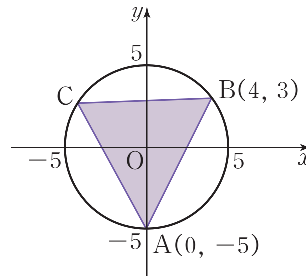
1 두 점 A$(-3,\ 1)$, B$(3,\ 4)$에 대하여 $\overline{\text{AP}}:\overline{\text{BP}}=2:1$인 점 P가 그리는 도형은 원이다. 이 원의 중심과 반지름의 길이를 구하여라.

01 원의 방정식

2 원점 O와 원 $x^2+y^2-6x-6y+16=0$ 위의 점 P에 대하여 선분 OP의 길이의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라고 할 때, mM의 값을 구하여라.

01 원의 방정식

3 원 $x^2+y^2=25$ 위의 두 점 A$(0,\ -5)$, B$(4,\ 3)$과 원 위를 움직이는 점 C에 대하여 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값을 구하여라.



02 원과 직선의 위치 관계
원의 접선의 방정식

4 원 $(x-1)^2+(y+3)^2=10$ 위의 점 A$(2,\ 0)$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

02 원과 직선의 위치 관계
원의 접선의 방정식

5 점 $(5,\ 5)$에서 원 $x^2+y^2=10$에 그은 두 접선과 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구하여라.

02 원과 직선의 위치 관계
원의 접선의 방정식

4

도형의 이동

당구에도 수학이?

당구는 벨벳을 깐 당구대 위에서 상아나 플라스틱으로 만든 몇 개의 공을 긴 막대기 끝으로 쳐서 승부를 가리는 실내 스포츠이다. 당구대 안쪽의 공이 부딪치는 가장자리 면을 쿠션이라고 하는데, 당구공을 치면 당구대의 쿠션에 부딪쳐 공이 반사되며 진행한다. 이때 부딪친 각도를 이용하여 당구공의 진행 경로를 예측할 수 있다.



단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자.

186쪽

수학을 이용하여 당구공의 진행 경로를 예측할 수 있을까?

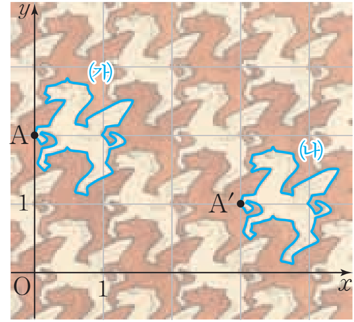
01 평행이동

● 평행이동의 의미를 이해한다.

평행이동한 점의 좌표를 어떻게 구하는가?

탐구 활동

네덜란드의 예술가 에스허르(Escher, M. C. ; 1898~1972)는 반복되는 기하학적 패턴을 이용한 작품을 많이 만들었다. 오른쪽 그림은 페가수스를 반복적으로 배열한 에스허르의 작품을 좌표평면 위에 올려놓은 것이다. 다음 물음에 답하여 보자.



1. 점 A′은 점 A를 어떻게 평행이동한 것인가?
2. 페가수스 (나)는 페가수스 (가)를 어떻게 평행이동한 것인가?

중 ② 어떤 도형을 일정한 방향으로 일정한 거리만큼 옮기는 것을 평행이동이라고 한다.

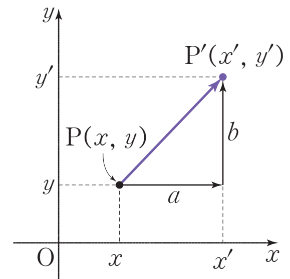
좌표평면 위의 임의의 점 $P(x,\ y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점을 $P'(x',\ y')$이라고 하면

$$x'=x+a,\quad y'=y+b$$

가 성립한다. 따라서 점 P'의 좌표는

$$P'(x+a,\ y+b)$$

이다.



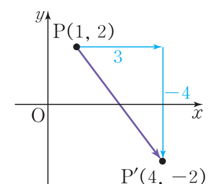
이상을 정리하면 다음과 같다.

점의 평행이동

점 $P(x,\ y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점 P'의 좌표는

$$P'(x+a,\ y+b)$$

보기 점 $P(1,\ 2)$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 점 P'의 좌표는 $(1+3,\ 2-4)$, 즉 $(4,\ -2)$이다.



문제 1 다음 점을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점의 좌표를 구하고, 좌표평면 위에 나타내어라.

(1) $(1,\ -2)$　　　　(2) $(3,\ 5)$

문제 2 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 점의 좌표가 다음과 같을 때, 점 P의 좌표를 구하여라.

(1) $(0,\ 0)$　　　　(2) $(-1,\ -2)$

평행이동한 도형의 방정식을 어떻게 구하는가?

직선의 방정식 $y=3x+2$와 원의 방정식 $x^2+y^2=1$은 각각

$$3x-y+2=0,\ x^2+y^2-1=0$$

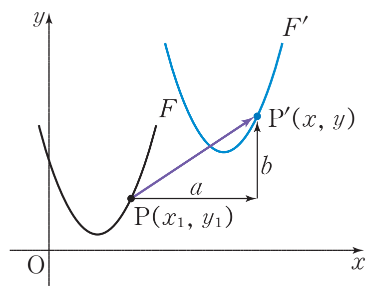
으로 나타낼 수 있다. 이와 같이 좌표평면 위의 도형의 방정식은 일반적으로

$$f(x,\ y)=0$$

과 같이 나타낼 수 있다.



이제 좌표평면에서 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형 F를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형 F'의 방정식을 구하여 보자.



도형 F 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점을 $\mathrm{P}'(x,\ y)$라고 하면 $x=x_1+a,\ y=y_1+b$이므로

$$x_1=x-a,\ y_1=y-b \qquad \cdots\cdots ①$$

이다. 그런데 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$은 도형 F 위의 점이므로

$$f(x_1,\ y_1)=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

이다. 이때 ①을 ②에 대입하면

$$f(x-a,\ y-b)=0$$

이 성립한다.

따라서 평행이동한 점 $\mathrm{P}'(x,\ y)$는 방정식 $f(x-a,\ y-b)=0$을 만족시킨다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

● $f(x-a, y-b)=0$은 $f(x, y)=0$에서 x 대신 $x-a$, y 대신 $y-b$를 대입한 것과 같다.

도형의 평행이동

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(x-a, y-b)=0$$

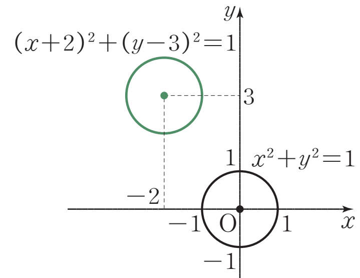
예제 01 원 $x^2+y^2=1$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하고, 좌표평면 위에 나타내어라.

풀이 원 $x^2+y^2=1$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$\{x-(-2)\}^2+(y-3)^2=1$$

따라서 구하는 도형의 방정식은

$$(x+2)^2+(y-3)^2=1$$



문제 3 다음 도형을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하여라.

(1) $2x+3y+6=0$ (2) $y=x^2+4x$

문제 4 직선 $y=ax+b$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하였더니 직선 $y=4x+5$와 일치하였다. 이때 상수 a, b의 값을 구하여라.

발전

문제 5 원 $x^2+y^2+4x-8y+11=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하였더니 중심이 원점이 되었다. 이때 상수 a, b의 값을 구하여라.

예제 02 직선 $y=2x$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동할 때, 원 $x^2+y^2=5$에 접하도록 하는 상수 a의 값을 모두 구하여라.

풀이 직선 $y=2x$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동하면

$$y=2(x-a) \qquad \cdots\cdots①$$

이것을 $x^2+y^2=5$에 대입하면

$$x^2+4(x-a)^2=5$$

$$5x^2-8ax+4a^2-5=0$$

직선 ①이 원에 접하므로

$$\frac{D}{4}=(-4a)^2-5(4a^2-5)=0$$

$$4a^2-25=0,\ a=\pm\frac{5}{2}$$

◉ 직선이 원에 접하면 직선과 원의 교점이 1개이므로 판별식 $D=0$이다.

답 $\pm\frac{5}{2}$

다른 풀이 직선 $y=2x$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동하면

$$y=2(x-a),\ 2x-y-2a=0$$

이 직선이 원 $x^2+y^2=5$와 접하므로 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $2x-y-2a=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같아야 한다. 즉,

$$\frac{|-2a|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5},\ |2a|=5$$

따라서 $a=\pm\frac{5}{2}$이다.

문제 6 원 $x^2+y^2=1$을 y축의 방향으로 b만큼 평행이동할 때, 직선 $y=-x$에 접하도록 하는 상수 b의 값을 모두 구하여라.

사고력 기르기

추론
▶ 의사소통
문제 해결

직선이나 원을 평행이동하여도 변하지 않는 성질에는 어떤 것이 있는지 토의하여 보자.

02 대칭이동

● 원점, x축, y축, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다.

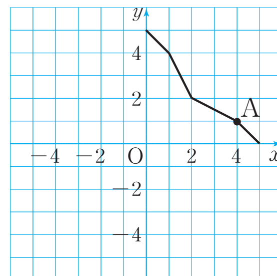
대칭이동한 점의 좌표를 어떻게 구하는가?

생각 열기 **데칼코마니**



데칼코마니는 화면을 밀착시킴으로써 물감의 흐름으로 생기는 우연한 얼룩이나 어긋남의 효과를 이용한 기법을 말한다. 종이 위에 그림물감을 두껍게 칠하고 반으로 접거나 다른 종이를 덮어 찍어서 대칭적인 무늬를 만드는 것으로 주로 인쇄기에 넣을 수 없는 물체에 장식을 하거나 상표를 붙일 때 이 기법을 이용한다. 데칼코마니라는 용어는 20세기 중엽의 독특한 미술 기법을 일컫는 말이었는데, 초현실주의 화가 에른스트(Ernst, M. ; 1891~1976)는 그림에 이 기법을 사용하였다.

탐구 활동 **다음 그림을 보고, 물음에 답하여 보자.**



1. 주어진 도형과 x축, y축, 원점에 대하여 대칭인 도형을 각각 그려 보자.

2. 점 A와 x축, y축, 원점에 대하여 대칭인 점을 각각 표시하고, 좌표를 구하여 보자.

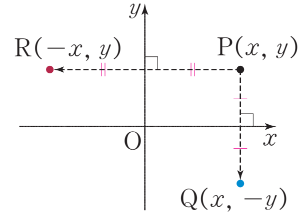
3. 점 A의 좌표와 **2**에서 구한 대칭인 점의 좌표를 비교하여 보자.

좌표평면 위의 점 P를 한 직선 또는 한 점에 대하여 대칭인 점으로 이동하는 것을 각각 직선 또는 점에 대한 **대칭이동**이라고 한다.

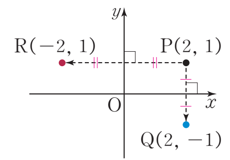
좌표평면 위의 한 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한 점의 좌표를 구하여 보자.

점 P를 직선 l에 대하여 대칭이동한 점을 P′이라고 하면 직선 l은 선분 PP′의 수직이등분선이다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축, y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 각각 $\mathrm{Q}(x,\ -y)$, $\mathrm{R}(-x,\ y)$가 된다.



보기 점 $\mathrm{P}(2,\ 1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $\mathrm{Q}(2,\ -1)$이고, y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $\mathrm{R}(-2,\ 1)$이다.



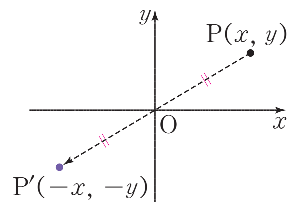
문제 1 다음 점을 x축, y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 각각 구하고, 좌표평면 위에 나타내어라.

(1) $(3,\ 4)$ (2) $(-1,\ 5)$

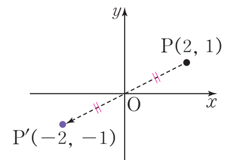
한편 점 P를 한 점 A에 대하여 대칭이동한 점을 P′이라고 하면 점 A는 선분 PP′의 중점이다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $\mathrm{P'}(-x,\ -y)$가 된다.

선분 PP′의 중점이 원점이므로 점 P′의 좌표는 $(-x,\ -y)$



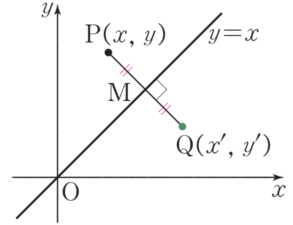
보기 점 $\mathrm{P}(2,\ 1)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $\mathrm{P'}(-2,\ -1)$이다.



문제 2 다음 점을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하고, 좌표평면 위에 나타내어라.

(1) $(1,\ 4)$ (2) $(2,\ -5)$

좌표평면에서 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 $\mathrm{Q}(x',\ y')$의 좌표를 구하여 보자.



오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$는 선분 PQ의 수직이등분선이다. 즉, 직선 PQ와 직선 $y=x$는 수직이므로

● 기울기가 각각 m, m'인 두 직선이 수직이면
$mm'=-1$

$$\frac{y'-y}{x'-x}\times 1=-1$$

$$x'+y'=x+y \qquad \cdots\cdots ①$$

이다. 또한 선분 PQ의 중점은

$$\mathrm{M}\left(\frac{x+x'}{2},\ \frac{y+y'}{2}\right)$$

이고, 이 점은 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$$\frac{y+y'}{2}=\frac{x+x'}{2}$$

$$x'-y'=-x+y \qquad \cdots\cdots ②$$

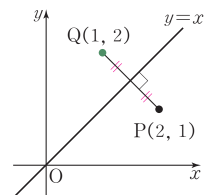
이다. ①, ②를 연립하여 풀면

$$x'=y,\ y'=x$$

이다.

따라서 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $\mathrm{Q}(y,\ x)$이다.

보기 점 $\mathrm{P}(2,\ 1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $\mathrm{Q}(1,\ 2)$이다.



문제 3 다음 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하고, 좌표평면 위에 나타내어라.

(1) $(2,\ 7)$　　(2) $(-3,\ 4)$　　(3) $(-5,\ -1)$

이상을 정리하면 다음과 같다.

점의 대칭이동

점 $(x,\ y)$를 대칭이동한 점의 좌표는
(1) x축에 대한 대칭이동: $(x,\ -y)$
(2) y축에 대한 대칭이동: $(-x,\ y)$
(3) 원점에 대한 대칭이동: $(-x,\ -y)$
(4) 직선 $y=x$에 대한 대칭이동: $(y,\ x)$

예제 01 좌표평면 위의 두 점 A$(0, 2)$, B$(8, 4)$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점 A′의 좌표를 구하여라.

(2) x축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값을 구하여라.

풀이 (1) 점 A$(0, 2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점은

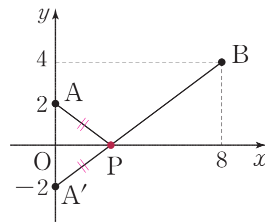
$$A'(0, -2)$$

(2) $\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{A'P}+\overline{PB}\ge\overline{A'B}$$

즉, 점 P가 선분 A′B와 x축의 교점일 때 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 값은 최소이고, 그때의 최솟값은

$$\overline{A'B}=\sqrt{(8-0)^2+\{4-(-2)\}^2}=10$$



△AOP≡△A′OP에서 $\overline{AP}=\overline{A'P}$

답 (1) A′$(0, -2)$ (2) 10

문제 4 좌표평면 위에 두 점 A$(2, 3)$, B$(7, 8)$이 있다. y축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값을 구하여라.

대칭이동한 도형의 방정식을 어떻게 구하는가?

탐구 활동 **원 $(x-5)^2+(y-4)^2=1$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.**

1. 원의 중심을 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하고, 좌표평면 위에 나타내어 보자.

2. **1**에서 구한 점이 중심이고 반지름의 길이가 1인 원의 방정식을 구하여 보자.

좌표평면에서 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형 F를 x축에 대하여 대칭이동한 도형 F'의 방정식을 구하여 보자.

도형 F 위의 임의의 점 P(x_1, y_1)을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 P′(x, y)라고 하면 $x=x_1$, $y=-y_1$이므로

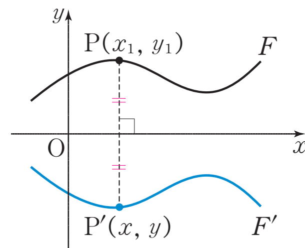
$$x_1=x,\ y_1=-y \quad \cdots\cdots ①$$

이다. 그런데 점 P(x_1, y_1)은 도형 F 위의 점이므로

$$f(x_1, y_1)=0 \quad \cdots\cdots ②$$

이다.

점 P′은 도형 F' 위의 점이다.



이때 ①을 ②에 대입하면

$$f(x,\ -y)=0$$

이 성립한다.

따라서 x축에 대하여 대칭이동한 점 $\mathrm{P}'(x,\ y)$는 방정식 $f(x,\ -y)=0$을 만족시킨다.

마찬가지 방법으로 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 y축, 원점, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 각각

$$f(-x,\ y)=0,\ f(-x,\ -y)=0,\ f(y,\ x)=0$$

임을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

도형의 대칭이동

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 대칭이동한 도형의 방정식은

(1) x축에 대한 대칭이동: $f(x,\ -y)=0$

(2) y축에 대한 대칭이동: $f(-x,\ y)=0$

(3) 원점에 대한 대칭이동: $f(-x,\ -y)=0$

(4) 직선 $y=x$에 대한 대칭이동: $f(y,\ x)=0$

예제 02

원 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$을 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 각각 구하고, 좌표평면 위에 나타내어라.

(i) x축에 대한 대칭이동
⇨ y의 부호를 반대로
(ii) y축에 대한 대칭이동
⇨ x의 부호를 반대로
(iii) 원점에 대한 대칭이동
⇨ $x,\ y$의 부호를 모두 반대로

풀이 (i) x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

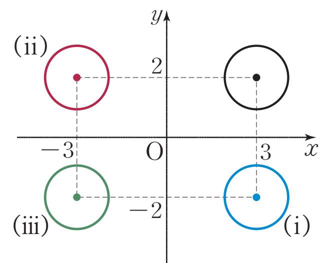
$$(x-3)^2+(-y-2)^2=1$$
$$(x-3)^2+(y+2)^2=1$$

(ii) y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$(-x-3)^2+(y-2)^2=1$$
$$(x+3)^2+(y-2)^2=1$$

(iii) 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$(-x-3)^2+(-y-2)^2=1$$
$$(x+3)^2+(y+2)^2=1$$



문제 5

다음 도형을 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 각각 구하고, 좌표평면 위에 나타내어라.

(1) $y=2x-1$ (2) $y=x^2-4x+6$ (3) $(x-1)^2+(y+3)^2=9$

예제 03 다음 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하고, 좌표평면 위에 나타내어라.

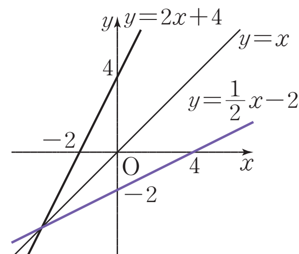
(1) $y=2x+4$　　　　(2) $(x+1)^2+y^2=4$

직선 $y=x$에 대한 대칭이동
⇨ x 대신 y, y 대신 x를 대입

풀이 (1) $y=2x+4$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$x=2y+4$$

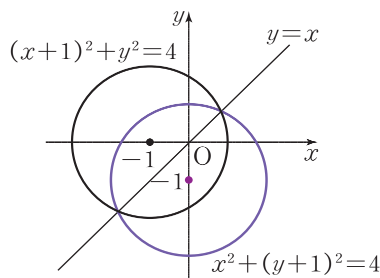
$$y=\frac{1}{2}x-2$$



(2) $(x+1)^2+y^2=4$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$(y+1)^2+x^2=4$$

$$x^2+(y+1)^2=4$$



문제 6 다음 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하고, 좌표평면 위에 나타내어라.

(1) $y=-2x+2$　　　　(2) $(x+3)^2+(y-1)^2=1$

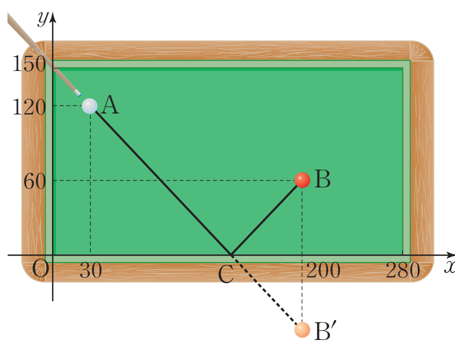
단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.



오른쪽 그림과 같이 당구대를 좌표평면 위에 나타내었을 때, 빨간 당구공을 나타내는 점 B를 x축에 대하여 대칭시킨 점을 B′이라고 하자. 당구공 A를 쳐서 쿠션을 한 번 맞힌 후 당구공 B를 맞히기 위하여 $\overline{AB'}$과 x축이 만나는 점 C를 조준하였다. 이때 점 C의 좌표를 구하여라.

(단, 당구공의 크기는 무시한다.)



1 다음 점을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점의 좌표를 구하여라.

(1) $(-1,\ 3)$　　(2) $(0,\ 0)$

01 평행이동
점의 평행이동

2 다음 도형을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하여라.

(1) $y=-x+2$

(2) $y=3x^2$

(3) $(x+3)^2+(y-1)^2=1$

01 평행이동
도형의 평행이동

3 점 $(1,\ -2)$를 다음에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하여라.

(1) x축　　(2) y축

(3) 원점　　(4) 직선 $y=x$

02 대칭이동
점의 대칭이동

4 원 $(x+1)^2+(y-3)^2=2$를 다음에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하여라.

(1) x축　　(2) y축

(3) 원점　　(4) 직선 $y=x$

02 대칭이동
도형의 대칭이동

1 직선 $y=2x+3$을 x축의 방향으로 k, y축의 방향으로 $-2k$만큼 평행이동하였더니 직선 $y=2x-5$와 일치하였다. 이때 상수 k의 값을 구하여라.

01 평행이동
도형의 평행이동

2 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 옮기는 평행이동에 의하여 점 $(3,\ -2)$가 점 $(1,\ 1)$로 옮겨질 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 상수 a, b의 값을 구하여라.

(2) 이 평행이동에 의하여 직선 $2x+5y+3=0$이 옮겨진 도형의 방정식을 구하여라.

01 평행이동
점과 도형의 평행이동

3 점 $\mathrm{A}(3,\ 1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 C라고 할 때, 선분 BC의 길이를 구하여라.

02 대칭이동
점의 대칭이동

4 직선 $y=2x+a$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 직선 $y=bx+2$와 일치한다. 이때 상수 a, b의 값을 구하여라.

02 대칭이동
도형의 대칭이동

5 원 $(x+1)^2+(y-3)^2=1$을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 후 다시 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하여라.

01 평행이동
02 대칭이동
도형의 평행이동과 대칭이동

[해답 p.233]

중단원 실력

1 원 $x^2+y^2+2x+4y+c=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하였더니 원 $x^2+y^2=2$와 일치하였다. 이때 상수 a, b, c의 값을 구하여라.

01 평행이동
도형의 평행이동

2 원 $x^2+y^2=1$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하였더니 x축과 직선 $y=x$에 동시에 접하였다. 이때 양수 a, b의 값을 구하여라.

01 평행이동
도형의 평행이동

3 점 $(2,\ 1)$을 지나는 직선을 x축에 대하여 대칭이동하였더니 점 $(0,\ 2)$를 지나게 되었다. 이때 처음 직선의 방정식을 구하여라.

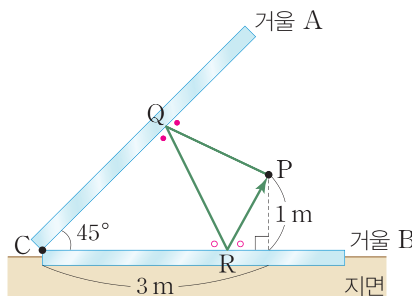
02 대칭이동
도형의 대칭이동

4 곡선 $y=x^2-1$ 위의 서로 다른 두 점 A, B가 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 때, 선분 AB의 길이를 구하여라.

02 대칭이동
점의 대칭이동

5 오른쪽 그림과 같이 두 거울 A, B가 45°의 각을 이루며 C에서 만나고 있다. 점 C에서 오른쪽으로 3 m, 위쪽으로 1 m 떨어진 지점 P에서 거울 A의 방향으로 빛을 발사하였더니 거울 A에서 반사된 후 거울 B에서 다시 반사되어 원래 지점 P로 되돌아왔다고 한다. 이때 빛의 경로 P−Q−R−P의 길이를 구하여라.

(단, 거울의 두께는 무시한다.)



02 대칭이동
점의 대칭이동

5 부등식의 영역

오늘 저 팀의 수비는 내야와 외야 모두 탄탄한데!

그러게, 7회까지 1점도 안 주는 거 보니까 이길 것 같아.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자.

197쪽

야구장의 내야를 부등식으로 표현할 수 있을까?

01 부등식의 영역

● 부등식의 영역의 의미를 이해한다.

부등식의 영역을 어떻게 나타내는가?

생각 열기

김장

김장은 하루 최저 기온이 0 ℃ 이하, 하루 평균 기온이 4 ℃ 이하로 떨어지는 시기에 하는 것이 좋다고 한다. 지구 온난화에 따른 기온 상승으로 김장을 하기 좋은 시기가 늦춰지는 경향을 보이고 있는데, 서울의 경우 1920년대에 비해 2000년대의 김장하기 좋은 시기는 약 12일 정도 늦춰졌다.

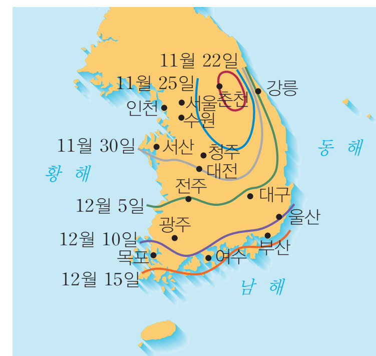


탐구 활동

오른쪽 그림은 어느 해의 주요 도시의 김장하기 좋은 시기를 예상하여 시기가 같은 지점을 선으로 연결한 것이다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 11월에 김장하기 좋은 도시를 모두 찾아보자.

2. 12월에 김장하기 좋은 도시를 모두 찾아보자.



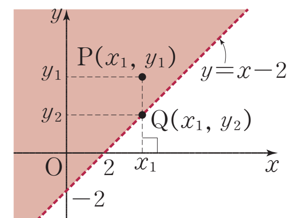
김장하기 좋은 시기

● 좌표평면에서 방정식 $y=x-2$를 만족시키는 점 $(x,\ y)$ 전체가 그리는 도형은 직선이다.

● 좌표평면은 직선에 의하여 두 부분으로 나누어진다.

좌표평면에서 부등식 $y>x-2$를 만족시키는 점을 나타내어 보자.

부등식 $y>x-2$를 만족시키는 임의의 점을 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$이라고 하면 $y_1>x_1-2$이다.



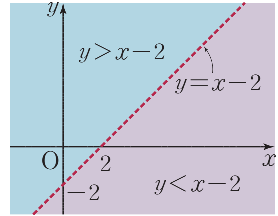
점 P를 지나고 y축에 평행한 직선을 그어 직선 $y=x-2$와 만나는 점을 $\mathrm{Q}(x_1,\ y_2)$라고 하면 $y_2=x_1-2$이다.

따라서 $y_1>y_2$이므로 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$은 직선 $y=x-2$의 위쪽에 놓여 있다.

거꾸로 직선 $y=x-2$의 위쪽에 있는 한 점을 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$이라고 하면 $y_1>x_1-2$이므로 부등식 $y>x-2$를 만족시킨다.

따라서 부등식 $y>x-2$를 만족시키는 점 전체는 직선 $y=x-2$의 윗부분이다.

마찬가지 방법으로 부등식 $y<x-2$를 만족시키는 점 전체는 직선 $y=x-2$의 아랫부분임을 알 수 있다.



이와 같이 좌표평면에서 x, y에 대한 부등식을 만족시키는 점 $(x,\ y)$ 전체를 그 부등식의 영역이라고 한다.

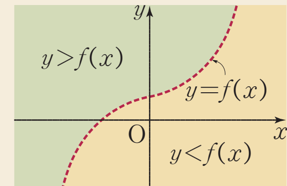
일반적으로 부등식의 영역에 대하여 다음이 성립한다.



부등식의 영역

(1) 부등식 $y>f(x)$의 영역은 함수 $y=f(x)$의 그래프의 윗부분이다.

(2) 부등식 $y<f(x)$의 영역은 함수 $y=f(x)$의 그래프의 아랫부분이다.



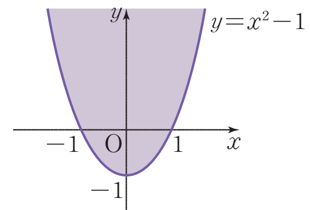
참고 (1) 부등식 $y\geq f(x)$가 나타내는 영역은 $y>f(x)$가 나타내는 영역에 경계선 $y=f(x)$를 포함시킨 것이고, 부등식 $y\leq f(x)$의 영역에 대하여도 마찬가지이다.

(2) 부등식의 영역을 나타낼 때에는 경계의 포함 여부를 반드시 구별해야 하는데, 일반적으로 부등식의 영역에 포함되는 경계는 실선으로, 포함되지 않는 경계는 점선으로 나타낸다.

예제 01 부등식 $y\geq x^2-1$의 영역을 좌표평면 위에 나타내어라.

풀이 이차함수 $y=x^2-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 부등식 $y\geq x^2-1$의 영역은 그래프의 윗부분이므로 오른쪽 그림의 색칠한 부분이다.

이때 경계선은 포함한다.



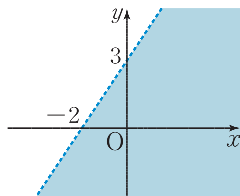
문제 1 다음 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내어라.

(1) $y\geq x+1$　　(2) $2x+y-2<0$

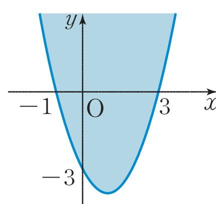
(3) $y<x^2+1$　　(4) $x^2+2x+y+1\geq 0$

문제 2 다음 그림의 색칠한 부분을 부등식으로 나타내어라. (단, 실선으로 표시된 경계선은 포함하고, 점선으로 표시된 경계선은 제외한다.)

(1)



(2)



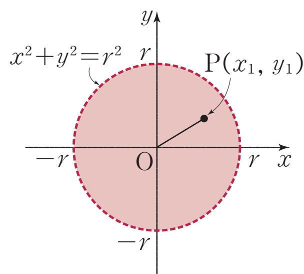
사고력 기르기

추론
▶ 의사소통
문제 해결

좌표평면에서 부등식 $x<a$, $y>b$의 영역은 각각 어떻게 나타내어야 하는지 말하여 보자.

원의 내부와 외부는 부등식으로 어떻게 나타내는가?

좌표평면에서 부등식 $x^2+y^2<r^2$의 영역을 나타내어 보자.



부등식 $x^2+y^2<r^2$을 만족시키는 임의의 점을 P$(x_1,\ y_1)$이라고 하면

$$x_1{}^2+y_1{}^2<r^2$$

이다. 이때 원점 O와 점 P 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}<r$$

이므로 점 P$(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=r^2$의 내부에 있다.

거꾸로 원 $x^2+y^2=r^2$의 내부에 있는 한 점을 P$(x_1,\ y_1)$이라고 하면

$$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}<r$$

에서

$$x_1{}^2+y_1{}^2<r^2$$

이므로 점 P$(x_1,\ y_1)$은 부등식 $x^2+y^2<r^2$을 만족시킨다.

따라서 부등식 $x^2+y^2<r^2$의 영역은 원 $x^2+y^2=r^2$의 내부이다.

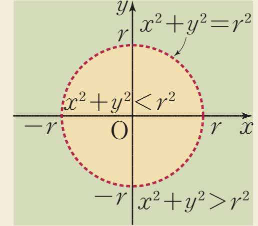
마찬가지 방법으로 부등식 $x^2+y^2>r^2$의 영역은 원 $x^2+y^2=r^2$의 외부임을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

원의 내부는 중심에서의 거리가 반지름의 길이보다 작은 점들의 영역이고, 원의 외부는 중심에서의 거리가 반지름의 길이보다 큰 점들의 영역이다.

원의 내부와 외부

(1) 부등식 $x^2+y^2<r^2$의 영역은 원 $x^2+y^2=r^2$의 내부이다.
(2) 부등식 $x^2+y^2>r^2$의 영역은 원 $x^2+y^2=r^2$의 외부이다.

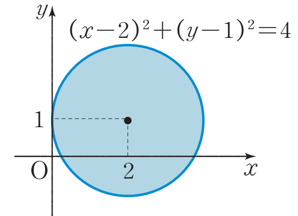


예제 02 부등식 $x^2+y^2-4x-2y+1\le 0$의 영역을 좌표평면 위에 나타내어라.

풀이 주어진 부등식을 변형하면

$$(x^2-4x+4)+(y^2-2y+1)\le 4$$
$$(x-2)^2+(y-1)^2\le 4$$

이 부등식의 영역은 중심이 점 $(2,\ 1)$이고, 반지름의 길이가 2인 원의 내부이므로 오른쪽 그림의 색칠한 부분이다.
이때 경계선은 포함한다.

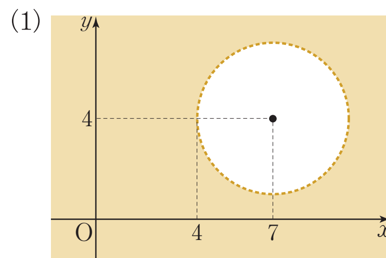


문제 3 다음 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내어라.

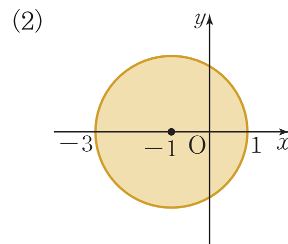
(1) $x^2+y^2\ge 9$
(2) $x^2+y^2-4<0$
(3) $(x+1)^2+(y-3)^2>1$
(4) $x^2+y^2+4x-4y\le 0$

문제 4 다음 그림의 색칠한 부분을 부등식으로 나타내어라. (단, 실선으로 표시된 경계선은 포함하고, 점선으로 표시된 경계선은 제외한다.)

(1)



(2)



사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

다음과 같은 방법으로 부등식 $x^2+y^2-2x+2y-2>0$의 영역을 찾아보자.

❶ 부등식 $f(x, y)>0$의 영역을 찾기 위하여 방정식 $f(x, y)=0$의 그래프를 그린다. 이때 그래프에 의하여 좌표평면은 두 부분으로 나뉜다.
❷ 방정식 $f(x, y)=0$의 그래프 위에 있지 않은 한 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$을 찾는다.
❸ 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$이 부등식을 만족시키면 점 P가 있는 부분이 부등식 $f(x, y)>0$의 영역이고, 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$이 부등식을 만족시키지 않으면 점 P가 있지 않은 부분이 부등식 $f(x, y)>0$의 영역이다.

연립부등식의 영역을 어떻게 나타내는가?

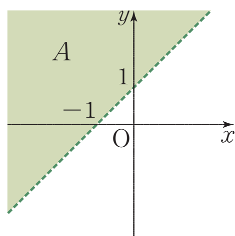
두 개 이상의 부등식을 동시에 만족시키는 점 전체를 연립부등식의 영역이라고 한다. 연립부등식의 영역은 각 부등식의 영역의 공통부분이다.

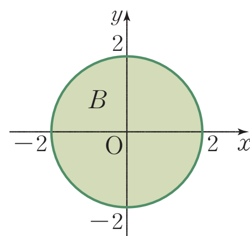
예제 03

다음 연립부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내어라.

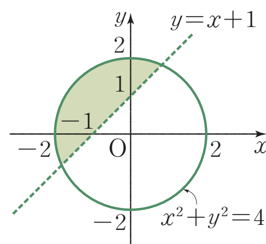
$$\begin{cases} y>x+1 & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2\le 4 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

풀이 부등식 ①, ②의 영역을 각각 A, B라고 하면 A, B는 다음 그림과 같다.





따라서 구하는 영역은 위의 두 영역의 공통부분이므로 오른쪽 그림의 색칠한 부분이다.
이때 실선으로 표시된 경계선은 포함하고, 점선으로 표시된 경계선은 제외한다.



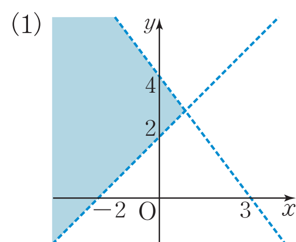
문제 5 다음 연립부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내어라.

(1) $\begin{cases} y \ge x-3 \\ x+2y-3>0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x+y-1 \ge 0 \\ y \le x^2 \end{cases}$

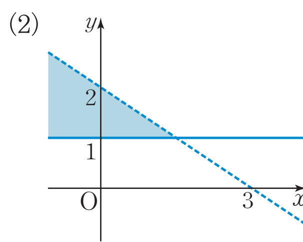
(3) $-x-1<y\le 2x-1$ (4) $1\le x^2+y^2<4$

문제 6 다음 그림의 색칠한 부분을 연립부등식으로 나타내어라. (단, 실선으로 표시된 경계선은 포함하고, 점선으로 표시된 경계선은 제외한다.)

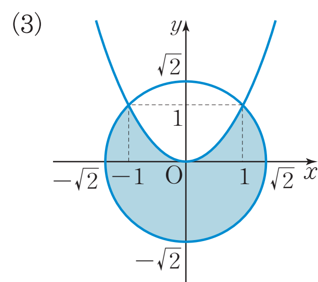
(1)



(2)



(3)



예제 04 다음 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내어라.

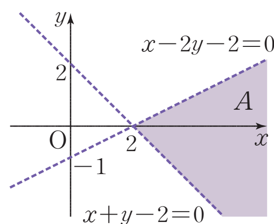
$$(x+y-2)(x-2y-2)>0$$

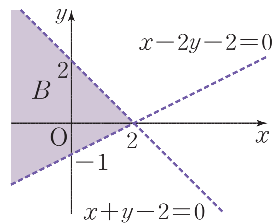
$AB>0$의 영역
$\begin{cases} A>0 \\ B>0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} A<0 \\ B<0 \end{cases}$

풀이 주어진 부등식이 성립하는 것은 다음의 두 경우이다.

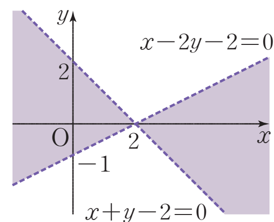
$$\begin{cases} x+y-2>0 \\ x-2y-2>0 \end{cases} \cdots\cdots ① \quad 또는 \quad \begin{cases} x+y-2<0 \\ x-2y-2<0 \end{cases} \cdots\cdots ②$$

연립부등식 ①, ②의 영역을 각각 A, B라고 하면 A, B는 다음 그림과 같다.





주어진 부등식이 성립하는 것은 ① 또는 ②의 경우이므로 구하는 부등식의 영역은 위 두 영역 모두이다. 따라서 구하는 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분이다. 이때 경계선은 제외한다.



문제 7 다음 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내어라.

● $AB\le0$의 영역
$\begin{cases}A\ge0\\B\le0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}A\le0\\B\ge0\end{cases}$

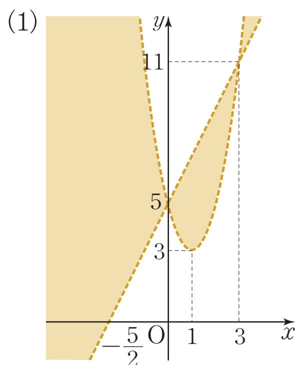
(1) $(x-3y+3)(-2x-y+1)\le0$　　(2) $(x-y+3)(x^2+y-5)<0$

(3) $(2x+y+1)(x^2+y^2-4)\ge0$　　(4) $(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)>0$

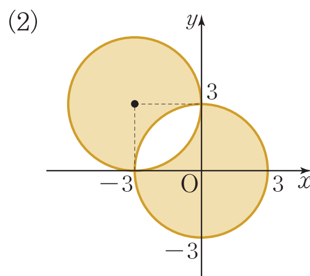
발전

문제 8 다음 그림의 색칠한 부분을 부등식으로 나타내어라. (단, 실선으로 표시된 경계선은 포함하고, 점선으로 표시된 경계선은 제외한다.)

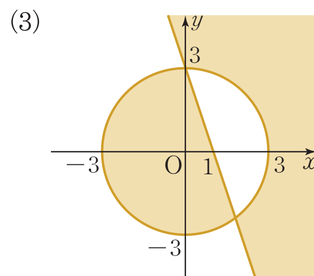
(1)



(2)



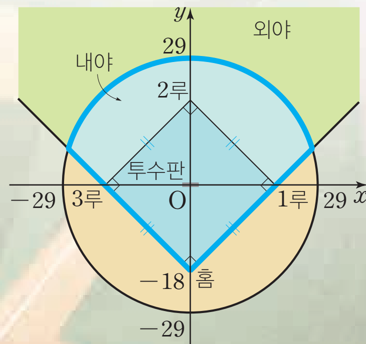
(3)



단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 어떤 야구장을 투수판을 원점으로 하여 좌표평면 위에 나타내었다. 투수판에서 홈까지의 거리는 18 m이고, 내야와 외야의 경계선은 투수판을 중심으로 하고 반지름의 길이가 29 m인 원의 일부일 때, 내야를 부등식으로 나타내어라. (단, 경계선은 제외한다.)



02 부등식의 영역에서의 최대, 최소

● 부등식의 영역을 활용하여 최대, 최소 문제를 해결할 수 있다.

부등식의 영역에서 최댓값과 최솟값을 어떻게 구하는가?

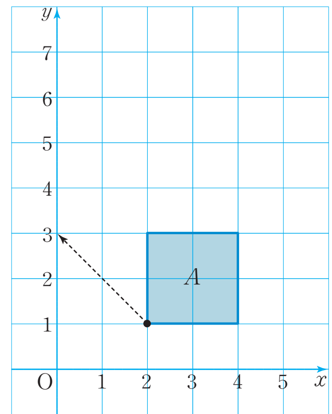
생각 열기

선형계획법

선형계획법은 일차부등식 또는 일차방정식을 만족시키는 제한 조건 아래에서 목적의 달성도를 최대로 하는 가장 좋은 방법을 구하는 수학적 기법이다. 이 기법은 제2차 세계 대전 중 군사에 필요한 자재의 구입이나 군인의 수송 등 군사 계획 기술로서 발전하였다. 그 후 기업의 경영 계획이나 국가 경제 운영 등에 광범위하게 이용되어 경비 절감을 실현하는 기본적인 방법으로 인식되고 있다.

탐구 활동

오른쪽 그림과 같은 좌표평면 위의 영역 A에 대하여 다음 물음에 답하여 보자. (단, 경계선은 포함한다.)



1. 영역 A에 속하는 모든 점 $(x,\ y)$를 $(0,\ x+y)$에 대응시킨다고 하자. 예를 들어 점 $(2,\ 1)$을 점 $(0,\ 2+1)$, 즉 $(0,\ 3)$에 대응시킨다. 이때 $x+y$의 최댓값과 최솟값을 구하여 보자.

2. **1**에서 구한 최댓값과 최솟값을 가지도록 하는 영역 A 위의 점을 구하여 보자.

좌표평면에서 연립부등식

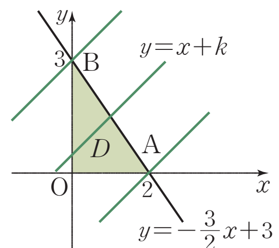
$$x\geq 0,\ y\geq 0,\ y\leq -\frac{3}{2}x+3$$

의 영역에 속하는 점 $(x,\ y)$에 대하여 일차식 $y-x$의 최댓값과 최솟값을 구하여 보자.

주어진 연립부등식의 영역을 D라고 하면 D는 오른쪽 그림에서 색칠한 삼각형 OAB와 그 내부이다. 이때 $y-x=k$ (k는 상수)로 놓으면

$$y=x+k$$

이므로 직선 $y=x+k$가 영역 D와 만날 때의 y절편인 k의 최댓값과 최솟값을 구하면 된다.



직선 $y=x+k$가 영역 D를 지나도록 평행이동하면서 움직여 보면 k의 값은 직선 $y=x+k$가

점 $\mathrm{B}(0,\ 3)$을 지날 때 최대가 되고, 최댓값은 $k=3$

점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$을 지날 때 최소가 되고, 최솟값은 $k=-2$

이다. 따라서 $y-x$의 최댓값은 3이고, 최솟값은 -2이다.

일반적으로 부등식의 영역에서 식 $f(x,\ y)$의 최댓값과 최솟값은 다음과 같은 순서로 구한다.

부등식의 영역에서의 최대, 최소

❶ 주어진 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타낸다.
❷ $f(x,\ y)=k$ (k는 상수)로 놓고, 이 그래프를 부등식의 영역과 만나도록 움직여 본다.
❸ k의 값 중에서 최댓값과 최솟값을 구한다.

예제 01

x, y가 세 부등식 $x\geq1$, $y\geq0$, $x+y\leq3$을 동시에 만족시킬 때, 일차식 $x-y$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

풀이 주어진 연립부등식의 영역을 D라고 하면 D는 오른쪽 그림에서 삼각형 ABC와 그 내부이다.

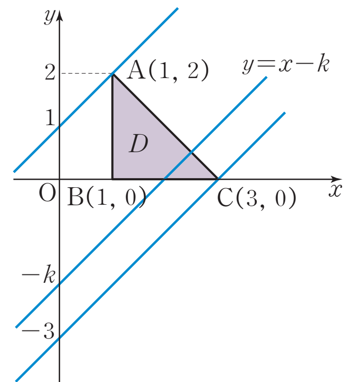
$x-y=k$ (k는 상수)로 놓으면

$$y=x-k$$

이므로 이것은 기울기가 1이고, y절편이 $-k$인 직선이다.

직선 $y=x-k$가 영역 D와 만나도록 움직여 보면 점 $\mathrm{C}(3,\ 0)$을 지날 때 k의 값이 최대이고, 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$를 지날 때 k의 값이 최소임을 알 수 있다.

따라서 $x-y$의 최댓값은 3이고, 최솟값은 -1이다.



답 최댓값: 3, 최솟값: -1

문제 1

x, y가 세 부등식 $x+y\geq0$, $x-2y+6\geq0$, $2x+y-3\leq0$을 동시에 만족시킬 때, 다음 일차식의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(1) $-x+y$

(2) $2x-y$

발전

문제 2 x, y가 부등식 $x^2+y^2\le 4$를 만족시킬 때, 일차식 $3x+y$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

부등식의 영역을 활용하여 실생활에서 최대, 최소 문제를 해결하여 보자.

예제 02

● 1 mg은 1 g의 $\frac{1}{1000}$이다.

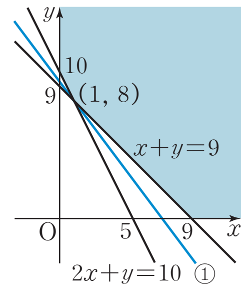
두 약품 A, B 각각 1 g에 들어 있는 성분 P, Q의 양과 1 g당 가격이 오른쪽 표와 같다. 약품 A, B로 성분 P를 10 mg 이상, 성분 Q를 9 mg 이상 복용하려고 할 때, 비용이 최소가 되도록 하는 약품 A, B의 양과 이때의 비용을 구하여라.

약품	성분		가격 (천 원)
	P(mg)	Q(mg)	
A	2	1	4
B	1	1	3

풀이 약품 A, B를 각각 x g, y g 섭취한다고 하면 다음 네 개의 부등식을 얻을 수 있다.

$$x\ge 0,\ y\ge 0,\ 2x+y\ge 10,\ x+y\ge 9$$

이 연립부등식의 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분이다.



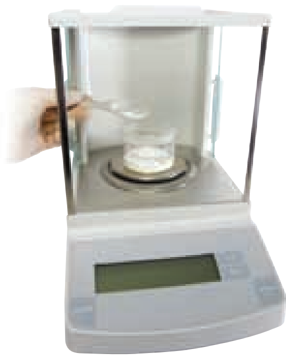
약품 A, B를 복용하는 데 필요한 비용을 k천 원이라고 하면

$$4x+3y=k \qquad \cdots\cdots ①$$

이고, k가 최소인 경우는 직선 ①이 두 직선

$$2x+y=10,\ x+y=9$$

의 교점 $(1,\ 8)$을 지날 때이다.



따라서 A를 1 g, B를 8 g 섭취할 때 비용이 최소가 되며, 이때의 비용은

$$4\times 1+3\times 8=28$$

이므로 2만 8천 원이다.

답 A: 1 g, B: 8 g, 2만 8천 원

문제 3 어느 공장에서 두 제품 A, B를 각각 1개씩 생산하는 데 필요한 원료 P, Q의 양과 얻어지는 이익이 오른쪽 표와 같다. 하루 동안 사용할 수 있는 원료 P, Q의 양이 각각 최대 150 kg, 160 kg이라고 할 때, 이익이 최대가 되도록 하는 제품 A, B의 개수와 이때의 이익을 구하여라.

제품	원료		이익 (천 원)
	P(kg)	Q(kg)	
A	3	2	3
B	3	4	4

중단원 기초

1 다음 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내어라.

(1) $y>2x+4$ (2) $2x+5y-10\le0$

(3) $y\ge x^2-4$ (4) $y<(x-1)^2$

01 부등식의 영역

2 다음 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내어라.

(1) $x^2+y^2\le3$ (2) $(x-2)^2+y^2\ge4$

(3) $x^2+(y+3)^2>1$ (4) $(x+1)^2+(y+2)^2<9$

01 부등식의 영역
원의 내부와 외부

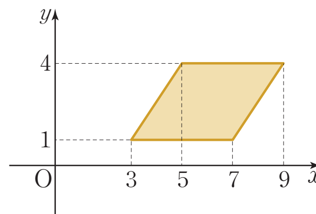
3 다음 연립부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내어라.

(1) $\begin{cases} y<x \\ y>-\dfrac{x}{2}+2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} y\ge x-2 \\ x^2+y^2\ge9 \end{cases}$

01 부등식의 영역
연립부등식의 영역

4 점 $(x,\ y)$는 오른쪽 그림의 색칠한 부분에 속하는 점이다. 이때 일차식 $2x+y$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(단, 경계선은 포함한다.)



02 부등식의 영역에서의 최대, 최소

5 x, y가 다음 부등식을 동시에 만족시킬 때, 일차식 $y-2x$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

$x\ge0$, $y\ge0$, $x+y\le4$

02 부등식의 영역에서의 최대, 최소

[해답 p.235]

중단원 기본

수준별 학습

1 이차방정식 $x^2+ax+b+1=0$이 실근을 가질 때, 점 $(a,\ b)$가 존재하는 영역을 좌표평면 위에 나타내어라.

01 부등식의 영역

2 부등식 $x^2+y^2\leq 1$의 영역이 부등식 $y\geq 2x+k$의 영역에 포함될 때, 실수 k값의 범위를 구하여라.

01 부등식의 영역
원의 내부와 외부

3 다음 연립부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내어라.

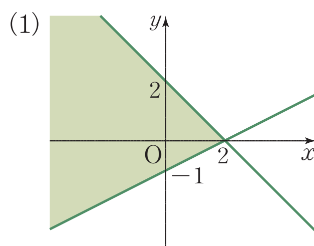
(1) $x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 1$

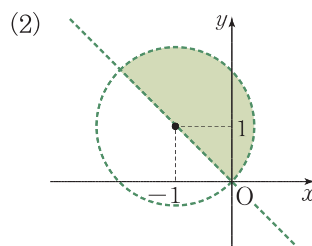
(2) $(x-y+1)(x+2y-2)\geq 0$

(3) $1\leq x^2+y^2<3$

01 부등식의 영역
연립부등식의 영역

4 다음 그림의 색칠한 부분을 연립부등식으로 나타내어라. (단, 실선으로 표시된 경계선은 포함하고, 점선으로 표시된 경계선은 제외한다.)

(1)


(2)


01 부등식의 영역
연립부등식의 영역

5 x, y가 다음 부등식을 동시에 만족시킬 때, 일차식 $2x-y$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

$$y\geq x^2,\ y\leq x+2$$

02 부등식의 영역에서의 최대, 최소

[해답 p.236]

중단원 실력

수준별 학습

1 점 $(2a,\ a)$가 세 점 $\mathrm{A}(0,\ 4)$, $\mathrm{B}(-1,\ 1)$, $\mathrm{C}(3,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 내부에 있을 때, 실수 a값의 범위를 구하여라.

01 부등식의 영역
연립부등식의 영역

2 부등식 $x^2+y^2\le r^2$의 영역이 부등식 $(x+y-\sqrt{2})(x^2+y^2-4)\ge 0$의 영역에 포함되도록 하는 양수 r의 최댓값을 구하여라.

01 부등식의 영역
연립부등식의 영역

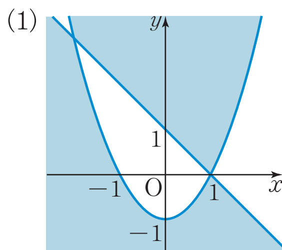
3 연립부등식 $\begin{cases} x^2+y^2\le 9 \\ (x-a)^2+y^2\le 1 \end{cases}$ 을 만족시키는 영역의 넓이가 최대가 되도록 하는 실수 a값의 범위를 구하여라.

01 부등식의 영역
연립부등식의 영역

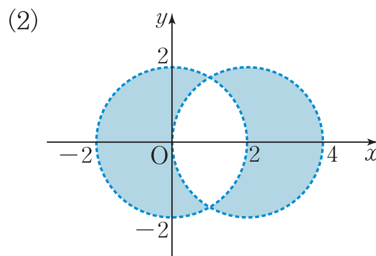
4 다음 그림의 색칠한 부분을 부등식으로 나타내어라. (단, 실선으로 표시된 경계선은 포함하고, 점선으로 표시된 경계선은 제외한다.)

01 부등식의 영역
연립부등식의 영역

(1)



(2)



5 오른쪽 표는 어느 공장에서 두 종류의 벽돌 A, B를 각각 한 개씩 생산하는 데 필요한 모래와 시멘트의 양과 벽돌 한 개당 얻을 수 있는 이익을 나타낸 것이다. 모래와 시멘트를 각각 4400 g, 5600 g이 넘지 않게 사용하여야 할 때, 이익이 최대가 되도록 하는 벽돌 A, B의 개수와 이때의 이익을 구하여라.

벽돌	모래(g)	시멘트(g)	이익(원)
A	300	200	400
B	200	400	500

02 부등식의 영역에서의 최대, 최소



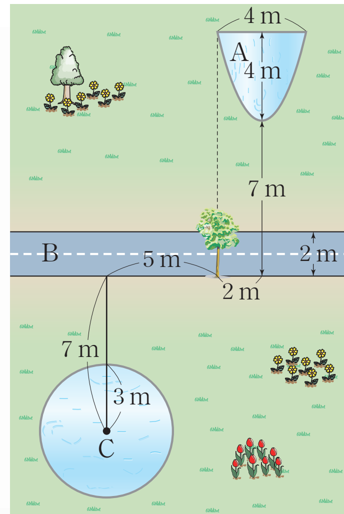
공원을 좌표평면 위에 나타내기

오른쪽 그림과 같이 어느 공원에 폭이 2 m인 자전거 도로 B와 두 개의 연못 A, C가 있다.

연못 A의 경계는 도로 B와 평행한 직선과 포물선 모양의 곡선으로 이루어져 있고, 공원 가운데의 나무를 기준으로 오른쪽으로 2 m, 위쪽으로 7 m 떨어진 지점에 포물선의 꼭짓점이 위치한다.

연못 C의 경계는 공원 가운데의 나무를 기준으로 왼쪽으로 5 m, 아래쪽으로 7 m 떨어진 지점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3 m인 원 모양이다.

(단, 나무의 크기는 무시한다.)



| 과 제 | 1 공원 가운데의 나무를 원점 O로 하여 공원을 좌표평면 위에 나타내어라.

| 과 제 | 2 과제 1의 두 연못 A, C와 자전거 도로 B의 영역을 부등식으로 나타내어라.

대단원 학습 내용 정리

1 평면좌표

두 점 사이의 거리

두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

선분을 내분하는 점과 외분하는 점

두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점 P와 외분하는 점 Q의 좌표는

$$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

$$Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right) \text{ (단, } m\neq n)$$

2 직선의 방정식

직선의 방정식

(1) 점 (x_1, y_1)을 지나고, 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

(2) 서로 다른 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선의 방정식은

(i) $x_1\neq x_2$일 때 $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

(ii) $x_1=x_2$일 때 $x=x_1$

두 직선의 평행, 일치, 수직

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이

(1) 평행하면 $m=m'$, $n\neq n'$

(2) 일치하면 $m=m'$, $n=n'$

(3) 수직이면 $mm'=-1$

점과 직선 사이의 거리

점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

3 원의 방정식

원의 방정식

중심이 $C(a, b)$이고, 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

원의 접선의 방정식

(1) 원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고, 기울기가 m인 접선의 방정식은

$$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$$

(2) 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=r^2$$

4 도형의 이동

평행이동

(1) 점 $P(x, y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점 P′의 좌표는 $P'(x+a, y+b)$

(2) 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(x-a, y-b)=0$$

대칭이동

(1) 점 (x, y)를 대칭이동한 점의 좌표는

(i) x축에 대한 대칭이동: $(x, -y)$

(ii) y축에 대한 대칭이동: $(-x, y)$

(iii) 원점에 대한 대칭이동: $(-x, -y)$

(iv) 직선 $y=x$에 대한 대칭이동: (y, x)

(2) 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 대칭이동한 도형의 방정식은

(i) x축에 대한 대칭이동: $f(x, -y)=0$

(ii) y축에 대한 대칭이동: $f(-x, y)=0$

(iii) 원점에 대한 대칭이동: $f(-x, -y)=0$

(iv) 직선 $y=x$에 대한 대칭이동: $f(y, x)=0$

5 부등식의 영역

부등식의 영역

부등식 $y>f(x)$의 영역은 함수 $y=f(x)$의 그래프의 윗부분이고, 부등식 $y<f(x)$의 영역은 함수 $y=f(x)$의 그래프의 아랫부분이다.

원의 내부와 외부

부등식 $x^2+y^2<r^2$의 영역은 원 $x^2+y^2=r^2$의 내부이고, 부등식 $x^2+y^2>r^2$의 영역은 원 $x^2+y^2=r^2$의 외부이다.

용어와 기호 내분, 외분, 대칭이동, $f(x, y)=0$

대/단/원 평가 문제

선택형

1 두 점 A$(1,\ -2)$, B$(4,\ 7)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라고 할 때, $a+b$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

2 삼각형 ABC의 두 꼭짓점이 A$(0,\ 4)$, B$(1,\ 1)$이고, 무게중심의 좌표가 $(2,\ 2)$일 때, 꼭짓점 C의 좌표는?

① $(4,\ 0)$ ② $(4,\ 1)$ ③ $(5,\ 1)$
④ $(5,\ 2)$ ⑤ $(6,\ 1)$

3 두 직선 $x+y-3=0$, $2x-3y-1=0$의 교점과 점 $(3,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은?

① $y=x+2$ ② $y=2x-3$
③ $y=2x+1$ ④ $y=3x-6$
⑤ $y=3x-3$

4 다음 중에서 점 $(1,\ -2)$를 지나고 직선 $3x-y+6=0$에 평행한 직선 위의 점은?

① $(0,\ 1)$ ② $(2,\ 3)$ ③ $(3,\ -3)$
④ $(4,\ -1)$ ⑤ $(5,\ 10)$

5 중심이 직선 $y=x+1$ 위에 있고, 두 점 $(0,\ -1)$, $(4,\ 1)$을 지나는 원의 반지름의 길이는?

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{2}$
④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

6 점 A$(0,\ 2)$에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 두 접선의 접점을 각각 B, C라고 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

① $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
④ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

7 원 $x^2+y^2+4x-6y+9=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하였더니 원점을 중심으로 하는 원이 되었다. 이때 $a+b$의 값은?

① -5 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

8 점 $(1,\ 0)$을 직선 $x+y=b$에 대하여 대칭이동하였더니 점 $(a,\ 2)$가 되었다. 이때 $a+b$의 값은?

① 0 ② 2 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

9 연립부등식 $\begin{cases} y \geq x+2 \\ x^2+y^2 \leq 4 \end{cases}$ 가 나타내는 영역의 넓이는?

① $\pi-2$ ② $\pi+2$ ③ $3\pi-2$
④ $3\pi+2$ ⑤ $4\pi-2$

10 x, y가 부등식 $x \leq 2$, $y \leq 4$, $2x+y \geq 4$를 동시에 만족시킬 때, $x+y$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

서답형

11 두 점 A$(1,\ 5)$, B$(-3,\ -3)$으로부터 같은 거리에 있고, 직선 $y=-x$ 위에 있는 점 P의 좌표를 구하여라.

12 세 점 O$(0,\ 0)$, A$(4,\ 4)$, B$(0,\ 6)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB가 있다. 삼각형 OAB의 세 꼭짓점에서 각각의 대변에 수선을 그었을 때, 세 수선의 교점의 좌표를 구하여라.

13 직선 $x+ky-2k+3=0$이 실수 k의 값에 관계없이 점 P를 지날 때, 점 P와 직선 $4x-3y-2=0$ 사이의 거리를 구하여라.

14 두 점 A$(-2,\ -3)$, B$(6,\ 1)$을 지름의 양 끝으로 하는 원의 방정식은 $x^2+y^2+ax+by+c=0$이다. 이때 세 실수 a, b, c의 곱 abc의 값을 구하여라.

|서|술|형|

15 원 $(x-5)^2+y^2=r^2$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하였더니 직선 $3x-4y+10=0$에 접하였다. 이때 r^2의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

|서|술|형|

16 세 점 A$(2,\ 3)$, B$(1,\ 1)$, C$(3,\ 2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC와 그 내부에 속하는 점 $(x,\ y)$에 대하여 $\dfrac{y+1}{x+2}$의 최댓값과 최솟값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

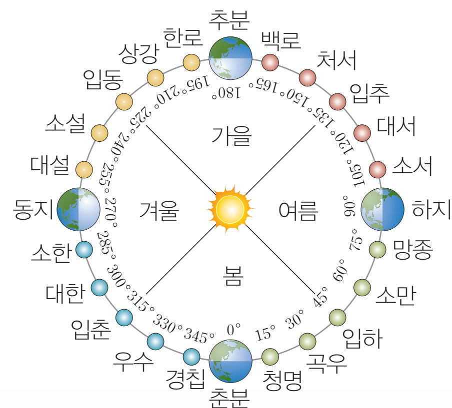
M+ Science



수 학 + 과 학

황도 좌표와 24절기

24절기란 한 해를 스물넷으로 나눈 것으로 입춘에서 입하 사이를 봄, 입하에서 입추 사이를 여름, 입추에서 입동 사이를 가을, 입동에서 입춘 사이를 겨울이라 하여 사계절의 기본으로 삼는다. 천문학적으로는 황도 좌표의 경도인 황경이 0°인 날을 춘분으로 하여 15° 간격으로 24절기를 나누었는데 90°인 날이 하지, 180°인 날이 추분, 270°인 날이 동지이다. 이와 같은 24절기는 중국의 계절 현상을 기준으로 했기 때문에 우리나라의 기후에 꼭 들어맞지는 않는다. 또한 날짜가 경도에 따라 변하므로 양력은 매년 같지만, 음력은 조금씩 달라지게 된다. 음력의 날짜가 계절과 차이가 많이 날 때에는 윤달(閏月)을 넣어 계절과 맞게 조정하는데, 태양력을 사용하는 오늘날에도 농촌에서는 관습적으로 계절의 변화를 확인하는 데 널리 쓰이고 있다.

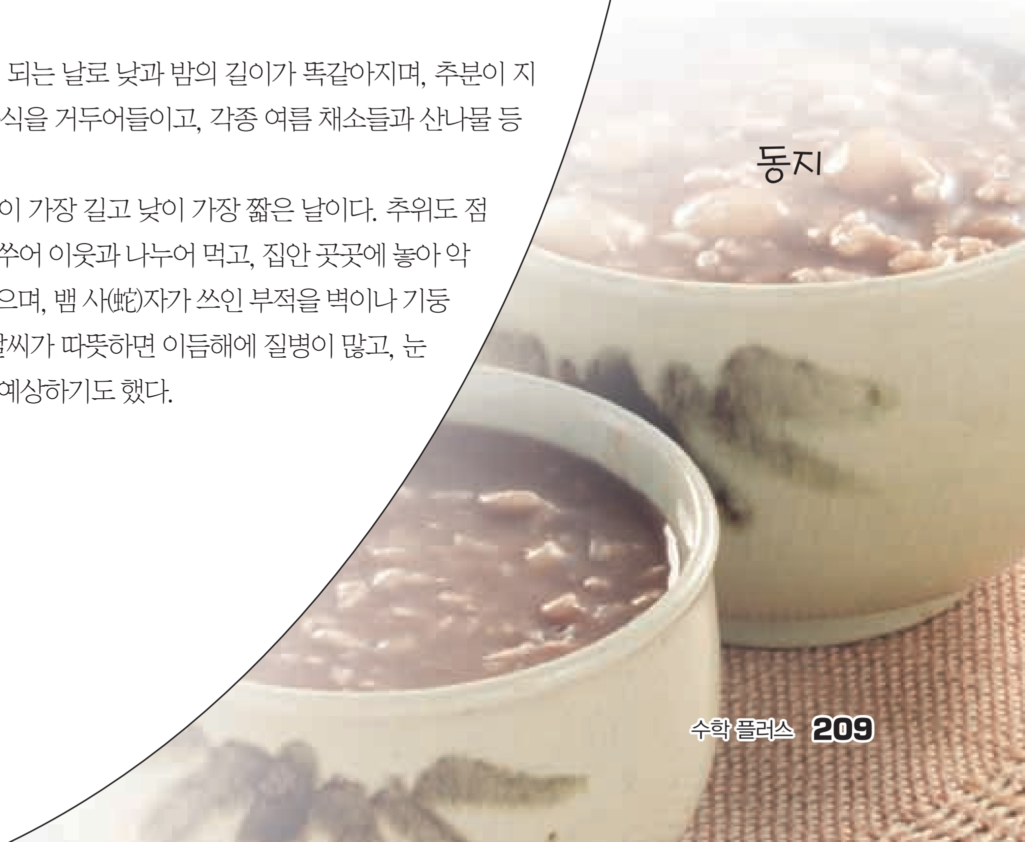


절기	입춘	우수	경칩	춘분	청명	곡우	입하	소만	망종	하지	소서	대서
황경	315°	330°	345°	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°
절기	입추	처서	백로	추분	한로	상강	입동	소설	대설	동지	소한	대한
황경	135°	150°	165°	180°	195°	210°	225°	240°	255°	270°	285°	300°

하지



- 춘분(春分): 태양이 적도를 똑바로 비추고 있어서 낮과 밤의 시간이 같아진다. 농촌에서는 흙을 일구고 씨를 뿌릴 준비를 한다. 그러나 2월 바람에 김칫독 깨진다는 속담이 있듯이 바람이 강해 흔히 꽃샘추위가 찾아온다.
- 하지(夏至): 12시에 태양이 가장 높게 있어 북반구에서는 낮 시간이 1년 중 가장 길고, 일사량도 가장 많다. 햇감자가 나오고, 이 시기가 지날 때까지 비가 오지 않으면 마을마다 기우제를 올렸다.
- 추분(秋分): 춘분으로부터 꼭 반년째 되는 날로 낮과 밤의 길이가 똑같아지며, 추분이 지나면 점차 밤이 길어진다. 논밭의 곡식을 거두어들이고, 각종 여름 채소들과 산나물 등을 말려 두기도 한다.
- 동지(冬至): 북반구에서는 1년 중 밤이 가장 길고 낮이 가장 짧은 날이다. 추위도 점차 심해지기 시작한다. 이날 팥죽을 쑤어 이웃과 나누어 먹고, 집안 곳곳에 놓아 악귀를 쫓았다. 새 달력을 만들어 걸었으며, 뱀 사(蛇)자가 쓰인 부적을 벽이나 기둥에 거꾸로 붙여 놓기도 했다. 이날 날씨가 따뜻하면 이듬해에 질병이 많고, 눈이 많이 오고 추우면 풍년이 들 것을 예상하기도 했다.





부 록

I 다항식

|준|비|학|습| [p. 11]

1 (1) 2 (2) 1 (3) -3

2 (1) a^2-4a+4 (2) a^2-b^2
(3) x^2-x-2 (4) $2x^2-5x-3$

3 (1) $(a+3)(a-3)$ (2) $(a+2)^2$
(3) $(x+2)(x+3)$ (4) $(2x+1)(x+2)$

1 다항식의 연산

01 다항식의 덧셈과 뺄셈 [p. 13~15]

1 (1) $x^3+y^3x^2+(3-2y)x+y^4+5$
(2) $x^3+3x+5-2xy+x^2y^3+y^4$

2 (1) x^3+4x^2+2x+5 (2) $8x^2+5x+5$
(3) $5x^3-4x^2-5x+10$ (4) $-x^3-12x^2-7x-10$

3 (1) $3x^3-4x^2y-4xy^2-y^3$ (2) $2x^3-x^2y-2xy^2+y^3$

4 $-4x^3+5y^2$

|단원 과제|

지면에서 수직 방향으로 초속 20 m로 던진 물체의 t초 후의 높이는 $20t-\frac{1}{2}\times10\times t^2=20t-5t^2$(m)이다.

(1) 물체 A의 높이: $(20x-5x^2)$m
물체 B의 높이: $20(x-2)-5(x-2)^2$
$=-5x^2+40x-60$(m)

(2) (물체 A의 높이)$-$(물체 B의 높이)
$=20x-5x^2-(-5x^2+40x-60)$
$=-20x+60$(m)

02 다항식의 곱셈 [p. 16~21]

1 $A(B+C)=(x+2)\{x^2+(x^2-3)\}=(x+2)(2x^2-3)$
$=2x^3-3x+4x^2-6=2x^3+4x^2-3x-6$

$AB+AC=(x+2)x^2+(x+2)(x^2-3)$
$=x^3+2x^2+x^3-3x+2x^2-6$
$=2x^3+4x^2-3x-6$

따라서 $A(B+C)=AB+AC$이다.

2 (1) $8x^3-2x^2-5x+2$
(2) $3x^2+7xy+13x-6y^2-5y+4$

3 (1) $a^2+b^2+4c^2-2ab+4bc-4ca$
(2) $4x^2+y^2-4xy+12x-6y+9$

4 (1) $x^4+2x^3-x^2-2x-8$
(2) $a^4-b^4+2b^2-1$

사고력 기르기

공통부분이 나오도록 묶어서 전개하면 편리하다.

$(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)$
$=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}$
$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)$
$=(X-2)(X-12)$ ← $x^2+x=X$
$=X^2-14X+24=(x^2+x)^2-14(x^2+x)+24$
$=x^4+2x^3-13x^2-14x+24$

5 (1) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ (2) a^3-b^3

6 (1) $x^3+9x^2y+27xy^2+27y^3$
(2) $8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3$
(3) a^3+8b^3 (4) x^3-8

7 (1) 31 (2) -170

8 (1) 1 (2) 9

창의 up

$101\times9901=(10^2+1)(10^4-10^2+1)=(10^2)^3+1$
$=10^6+1=1000001$

03 다항식의 나눗셈 [p. 22~24]

1 (1) $Q=x^2+2x$, $R=3$
$x^3+x^2-2x+3=(x-1)(x^2+2x)+3$
(2) $Q=x-1$, $R=-2x+2$
$x^3-2x+1=(x^2+x+1)(x-1)-2x+2$

2 $2x^2+5x+4$

3 $a=-1,\ b=-1$

사고력 기르기

$2x^3+x^2-1$을 이차식 x^2-1로 나눈 나머지는 일차 이하의 다항식이어야 한다. 따라서 이차식 x^2+2x-1은 x^2-1로 나눈 나머지가 될 수 없다.
실제로 다항식 $2x^3+x^2-1$을 x^2-1로 나누어 정리하면
$2x^3+x^2-1=(x^2-1)(2x+1)+2x$
이므로 나머지는 $2x$이다.

중단원 기초 [p.25]

1 (1) $3x^3+yx^2+2y^2-y-1$
(2) $3x^3-1+(x^2-1)y+2y^2$

2 (1) x^3-x^2-x+5 (2) $5x^3-3x^2+4$
(3) $2x^3+5x^2-5x+1$ (4) $x^4+x^3-2x^2-2x$

3 (1) $8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$
(2) $x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$
(3) x^3+27y^3
(4) $8x^3-y^3$

4 (1) 3 (2) 45

5 (1) 몫: $x+3$, 나머지: 6
(2) 몫: x^2-2x+4, 나머지: -7

중단원 기본 [p.26]

1

$-x^3-3x+2$	$-2x^3-x^2-4x+1$	$3x^3+4x^2+x+6$
$4x^3+5x^2+2x+7$	x^2-2x+3	$-4x^3-3x^2-6x-1$
$-3x^3-2x^2-5x$	$2x^3+3x^2+5$	x^3+2x^2-x+4

2 (1) $x^4+10x^3+35x^2+50x+24$
(2) x^8-y^8
(3) $x^3+y^3+z^3-3xyz$

3 $\frac{10}{3}$

4 (1) 몫: $2x$, 나머지: $-7x+1$
(2) 몫: $2x-3$, 나머지: $4x+3$

5 x^3-x^2+x-1

중단원 실력 [p.27]

1 $A-2(X-B)=3A$에서
$A-2X+2B=3A,\ 2X=-2A+2B$
$X=-A+B=-(x^2-xy-2y^2)+2x^2+xy-y^2$
$=x^2+2xy+y^2$

2 $(x^3+x^2+x+1)^3$에서 $x^2+x+1=A$로 놓으면
$(x^3+A)^3=x^9+3x^6A+3x^3A^2+A^3$
이므로 이차항이 나오는 경우는 A^3뿐이다.
따라서 $(x^3+x^2+x+1)^3$과 $A^3=(x^2+x+1)^3$의 x^2의 계수는 서로 같다.

3 $a^2+ab+b^2=7$ …… ①
$a^2-ab+b^2=3$ …… ②
①+②에서 $2(a^2+b^2)=10,\ a^2+b^2=5$
①−②에서 $2ab=4,\ ab=2$
$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$
$=5+2\cdot2=9$
이때 a, b는 양수이므로 $a+b=3$
$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=3^3-3\cdot2\cdot3=9$

4 상자의 가로, 세로의 길이와 높이를 각각 a cm, b cm, c cm라고 하면 상자의 겉넓이가 24 cm²이므로
$2(ab+bc+ca)=24$에서 $ab+bc+ca=12$
모든 모서리의 길이의 합이 28 cm이므로
$4(a+b+c)=28$에서 $a+b+c=7$
상자의 대각선 AG의 길이는 피타고라스 정리에 의하여
$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ cm이므로
$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$=7^2-2\times12=25$
$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{25}=5$
따라서 상자의 대각선 AG의 길이는 5 cm이다.

5

$$\begin{array}{r|l}
 & x\ -3 \\
x^2+x+1 & x^3-2x^2+\qquad ax+b \\
 & x^3+\ x^2+\qquad x \\ \hline
 & \quad -3x^2+(a-1)x+b \\
 & \quad -3x^2-\qquad 3x-3 \\ \hline
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

따라서 $a=-2,\ b=-3$이다.

$$\begin{array}{r} x-2 \\ x^2-2\overline{)x^3-2x^2-2x-3} \\ \underline{x^3 \quad\quad -2x} \\ -2x^2 \quad -3 \\ \underline{-2x^2 \quad +4} \\ -7 \end{array}$$

몫: $x-2$, 나머지: -7

2 나머지정리

01 항등식 [p. 29~32]

1 ㉠, ㉡, ㉣

2 주어진 등식을 이항하여 정리하면
$(a-a')x^2+(b-b')x+(c-c')=0$
예제 1에 의하여 등식 $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이 될 조건은
$a-a'=0$, $b-b'=0$, $c-c'=0$, 즉
$a=a'$, $b=b'$, $c=c'$이다.

3 (1) $a=1$, $b=1$, $c=-1$
(2) $a=3$, $b=-5$, $c=-2$
(3) $a=2$, $b=0$, $c=5$

4 $a=3$, $b=0$

5 $a=3$, $b=2$

사고력 기르기

태어난 달을 x, 태어난 날을 y라고 하여 여학생의 말대로 계산하면 $10(10x-2)+y+20=100x+y$로 나타낼 수 있다. 이때 천의 자리와 백의 자리 숫자는 태어난 달, 십의 자리와 일의 자리 숫자는 태어난 날이 된다.

02 나머지정리 [p. 33~38]

1 (1) -16 (2) -4

2 -3

3 (1) $-\frac{9}{4}$ (2) $-\frac{2}{27}$

4 $x+2$

5 -4

6 $a=-3$, $b=-2$

7 $a=-2$, $b=1$

8 (1) 몫: $2x^2+3x+10$, 나머지: 31
(2) 몫: $5x^2-x+1$, 나머지: 0

9 (1) 몫: x^2-3x+5, 나머지: -11
(2) 몫: $2x^2+6$, 나머지: -5

| 단원 과제 |

$x^n=(x-1)Q(x)+R$는 x에 대한 항등식이므로 $x=1$을 대입하면 $R=1$, 즉 $x^n=(x-1)Q(x)+1$이다.
이 등식에 $x=102$, $n=100$을 대입하면
$102^{100}=101Q(102)+1$
따라서 102^{100}을 101로 나눈 나머지는 1이다.

중단원 기초 [p. 39]

1 (1) $a=-4$, $b=-1$
(2) $a=1$, $b=1$, $c=-3$
(3) $a=5$, $b=7$

2 (1) 3 (2) 9

3 ㉠, ㉢

4 (1) -2 (2) -3

5 (1) 몫: x^2-2x+4, 나머지: -12
(2) 몫: $3x^2+5x+7$, 나머지: 16

중단원 기본 [p. 40]

1 $a=\frac{7}{2}$, $b=-2$, $c=\frac{1}{2}$

2 $a=1$, $b=-1$, $c=-1$

3 $\frac{3}{2}x+6$

4 $a=1,\ b=-4$

5 -6

중단원 실력 [p. 41]

1 $y=(2k+1)x+4k-3$을 k에 대하여 정리하면
$(2x+4)k+x-y-3=0$
이것은 k에 대한 항등식이므로
$2x+4=0,\ x-y-3=0$에서 $x=-2,\ y=-5$
따라서 함수 $y=(2k+1)x+4k-3$의 그래프는 k의 값에 관계없이 점 $\mathrm{P}(-2,\ -5)$를 반드시 지난다.

2 $P(x)=x^2-ax+b$이고 $x^nP(x)$를 $(x-2)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면
$x^nP(x)=(x-2)^2Q(x)+2^n(x-2)$ …… ①
①의 양변에 $x=2$를 대입하면 $2^nP(2)=0,\ P(2)=0$이므로
$P(x)=x^2-ax+b=(x-2)(x-c)$ (c는 상수)
로 놓을 수 있다.
①에 의하여
$x^nP(x)=x^n(x-2)(x-c)$
$=(x-2)\{(x-2)Q(x)+2^n\}$
이므로 $x^n(x-c)=(x-2)Q(x)+2^n$
양변에 $x=2$를 대입하면 $2^n(2-c)=2^n,\ c=1$
$P(x)=x^2-ax+b=(x-2)(x-1)=x^2-3x+2$
따라서 $a=3,\ b=2$이다.

3 $P(1-x)$를 $x-1$로 나눈 몫을 $Q_1(x)$라고 하면
$P(1-x)=(x-1)Q_1(x)-4$
양변에 $x=1$을 대입하면 $P(0)=-4$
$xP(x)$를 $(x+1)(x-4)$로 나눈 몫을 $Q_2(x)$라고 하면
$xP(x)=(x+1)(x-4)Q_2(x)$
양변에 $x=-1,\ x=4$를 각각 대입하면
$P(-1)=P(4)=0$
$P(x)$는 이차식이므로
$P(x)=a(x+1)(x-4)$ (a는 상수)로 놓을 수 있고,
$P(0)=-4$이므로 $-4a=-4,\ a=1$
따라서 $P(x)=(x+1)(x-4)$이므로 $P(x)$를 $x+2$로 나눈 나머지는 $P(-2)=6$이다.

4 $\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)^{10}$을 $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지 $R(x)=ax+b$ ($a,\ b$는 상수)라고 하면
$\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)^{10}=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)Q(x)+ax+b$
$=\frac{1}{2}(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$
양변에 $x=1$을 대입하면
$0=a+b$ …… ①
양변에 $x=-1$을 대입하면 $(-1)^{10}=-a+b$에서
$-a+b=1$ …… ②
①, ②를 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2}$
따라서 $R(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$이므로
$R(-2)=-\frac{1}{2}\cdot(-2)+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

5 $P(x)=2x^3+x^2-3$을 $x-1$로 계속 나누어 보면
$P(x)=2x^3+x^2-3$
$=(x-1)(2x^2+3x+3)$
$=(x-1)\{(x-1)(2x+5)+8\}$
$=(x-1)^2(2x+5)+8(x-1)$
$=(x-1)^2\{2(x-1)+7\}+8(x-1)$
$=2(x-1)^3+7(x-1)^2+8(x-1)$
따라서 $a=2,\ b=7,\ c=8,\ d=0$이다.

3 인수분해

01 인수분해 [p. 43~48]

1 (1) $(x+3)^3$
(2) $(4a-1)^3$
(3) $(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)$
(4) $(a-3b)(a^2+3ab+9b^2)$

2 (1) $2(a+2)^3$
(2) $ab(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)$

3 (1) $(x+4)(x-3)$
(2) $(x^2-3)(x+2)(x-2)$
(3) $(x^2-2x-2)^2$
(4) $(x^2+6x+2)(x^2+6x-4)$

4 (1) $(x^2+3x+5)(x^2-3x+5)$
(2) $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$
(3) $(x^2+xy+2y^2)(x^2-xy+2y^2)$
(4) $(x^2+2xy-y^2)(x^2-2xy-y^2)$

5 (1) $(a-1)(a+b+2)$
(2) $(x+2y-1)(x-y+1)$
(3) $(a-b)(a^2+b^2+c^2)$
(4) $(x+y+2)(x-3y+2)$

6 (1) $(x+1)(x-2)(x-3)$
(2) $(x-1)(x+1)(x^2-x+3)$

7 $k=5$, $P(x)=(x-2)(x+1)(x-7)$

8 (1) $(2x+1)(x^2+x+1)$
(2) $(x-1)(x+1)(2x-1)(x+3)$

| 단원 과제 |

$$\frac{998^3-1}{998\times999+1}=\frac{(998-1)(998^2+998+1)}{998(998+1)+1}$$
$$=\frac{(998-1)(998^2+998+1)}{998^2+998+1}$$
$$=998-1=997$$

중단원 기초 [p.49]

1 (1) $x(x+2)^2$ (2) $3x^2(2x+1)(x-3)$
(3) $(x+1)^2(x-1)$ (4) $(x+y)(xy+1)$

2 (1) $(2a+1)^3$
(2) $(x-3y)^3$
(3) $(a+2)(a^2-2a+4)$
(4) $(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)$

3 (1) $(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)$
(2) $(x+y-1)^2$

4 (1) $(x-1)(x^2+2x+2)$
(2) $(x-2)(x+1)(x+3)$
(3) $(x-1)^2(x+1)(x+2)$
(4) $(x-2)(x^3+2x^2+1)$

5 $a+3$

중단원 기본 [p.50]

1 (1) $(x-1)(x+2)(x-2)(x+3)$
(2) $(x+1)(x-4)(x-1)(x-2)$
(3) $(x+y)(x-y)(x^2-2y^2)$
(4) $(x+1)(x-3)(x+2)(x-4)$

2 (1) $(x+3y-1)(x-y+1)$
(2) $(x-y-2)(2x+y-3)$

3 $(a+b)(b+c)(c+a)$

4 $a=3$
$x^3-x^2+x+3=(x+1)(x^2-2x+3)$

5 10100

중단원 실력 [p.51]

1 (1) $a^4+a^2b^2+b^4=(a^4+2a^2b^2+b^4)-a^2b^2$
$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2$
$=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$
(2) $x^4+3x^2+4=(x^4+4x^2+4)-x^2$
$=(x^2+2)^2-x^2$
$=(x^2+x+2)(x^2-x+2)$
(3) $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$
$=ab(a-b)+b^2c-bc^2+c^2a-ca^2$
$=ab(a-b)+c^2(a-b)-c(a-b)(a+b)$
$=(a-b)(ab+c^2-ca-bc)$
$=(a-b)\{a(b-c)+c(c-b)\}$
$=(a-b)(b-c)(a-c)$

2 $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)$
$=(x+1)(x+7)(x+3)(x+5)$
$=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)$ ← $x^2+8x=X$
$=(X+7)(X+15)$
$=X^2+22X+105$
$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+k$
$=X^2+22X+105+k$가 완전제곱식이 되려면
$X^2+22X+105+k=(X+11)^2$이어야 하므로
$105+k=11^2=121$, $k=16$

3 $\dfrac{900\cdot901+1}{931}=\dfrac{30^2(30^2+1)+1}{30^2+30+1}=\dfrac{30^4+30^2+1}{30^2+30+1}$

$=\dfrac{(30^2+30+1)(30^2-30+1)}{30^2+30+1}$

$=30^2-30+1=871$

4 $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$

$=\{(a+b)^3+c^3\}-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab)$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=0$

5 $a^3+a^2b-ac^2+ab^2+b^3-bc^2$

$=-c^2(a+b)+a^3+a^2b+ab^2+b^3$

$=-c^2(a+b)+a^2(a+b)+b^2(a+b)$

$=(a+b)(a^2+b^2-c^2)$

$(a+b)(a^2+b^2-c^2)=0$이므로

$a+b=0$ 또는 $a^2+b^2-c^2=0$

a, b, c는 모두 양수이므로 $a+b\neq0$

따라서 $a^2+b^2-c^2=0$, $c^2=a^2+b^2$이므로 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

대/단/원 평가 문제 [p. 54~55]

1 ②	2 ⑤	3 ③	4 ③	5 ③
6 ④	7 ⑤	8 ②	9 ②	10 ⑤
11 ②	12 ③	13 (1) $a=-4$, $b=2$ (2) $x-3$		
14 풀이 참조		15 풀이 참조		
16 풀이 참조				

12 $P(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$P(x)=x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x^2+3x+2)$

$=(x-1)(x+1)(x+2)$

$Q(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$Q(x)=x^3-4x^2+x+6=(x+1)(x^2-5x+6)$

$=(x+1)(x-2)(x-3)$

따라서 다항식 $P(x)$와 $Q(x)$의 공통인수는 $x+1$이다.

13 $P(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면

$P(x)=(x+1)(x-2)Q(x)+x+1$

(1) $P(-1)=(-1)^3+a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+7=0$에서

$a-b=-6$ …… ①

$P(2)=2^3+a\cdot2^2+b\cdot2+7=3$에서

$2a+b=-6$ …… ②

①, ②를 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=2$

(2) $P(x)=x^3-4x^2+2x+7$이므로

$x^3-4x^2+2x+7=(x+1)(x-2)Q(x)+x+1$

$(x+1)(x-2)Q(x)=x^3-4x^2+x+6$

$=(x+1)(x-2)(x-3)$

따라서 구하는 몫은 $x-3$이다.

14 (1) $x^2+(y-2)x-2y^2-y+1$

(2) $-2y^2-y+1=-(2y-1)(y+1)$

(3) (1), (2)에서

$P(x)=x^2+(y-2)x-(2y-1)(y+1)$

$=(x+2y-1)(x-y-1)$

15 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-1)^2-4\cdot(-1)+3=c$에서 $c=8$

$x=0$을 대입하면

$3=a+b+8$에서

$a+b=-5$ …… ①

$x=-2$를 대입하면

$(-2)^2-4\cdot(-2)+3=a-b+8$에서

$a-b=7$ …… ②

①, ②를 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-6$

16 $P(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$P(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$

$x=1$, $x=2$를 각각 대입하면

$P(1)=a+b=2$ …… ①

$P(2)=2a+b=3$ …… ②

①, ②를 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$

$P(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+x+1$

$Q(x)=0$일 때 $P(x)$의 차수가 가장 낮으므로 구하는 $P(x)$는 $P(x)=x+1$

Ⅱ 방정식과 부등식

|준|비|학|습| [p. 59]

1 (1) $x=-5$ 또는 $x=3$ (2) $x=\frac{-1\pm\sqrt{65}}{4}$

2 (1) $x=-1,\ y=-2$ (2) $-3\le x<2$

3 (1) $(x-1)(x^2+4x+5)$ (2) $(x+1)(x-2)(x-3)$

1 복소수와 이차방정식

01 복소수 [p. 61~69]

1 실수: 4, 허수: $2+3i,\ \sqrt{5}-2i,\ \frac{1}{2}i$

2 (1) $x=0,\ y=2$ (2) $x=-3,\ y=4$

3 (1) $5-4i$ (2) $1+\sqrt{2}i$ (3) $-5i$ (4) -4

사고력 기르기

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라고 하면 $\bar{z}=a-bi$이다. $z=\bar{z}$, 즉 $a+bi=a-bi$에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $b=-b$이므로 $b=0$이다. 따라서 z는 실수가 된다.

4 (1) $8-i$ (2) $-3+2i$ (3) $7-7i$ (4) $-3-9i$

5 (1) $z_1+z_2=(2+3i)+(3-2i)=5+i$

$z_2+z_1=(3-2i)+(2+3i)=5+i$

따라서 $z_1+z_2=z_2+z_1$이다.

(2) $(z_1+z_2)+z_3=\{(2+3i)+(3-2i)\}+(1+i)$

$=(5+i)+(1+i)=6+2i$

$z_1+(z_2+z_3)=(2+3i)+\{(3-2i)+(1+i)\}$

$=(2+3i)+(4-i)=6+2i$

따라서 $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$이다.

6 (1) $7-4i$ (2) $2i$ (3) $-i$ (4) $\frac{6}{13}-\frac{4}{13}i$

7 (1) $z_1z_2=(2-i)(2+i)=5$

$z_2z_1=(2+i)(2-i)=5$

따라서 $z_1z_2=z_2z_1$이다.

(2) $(z_1z_2)z_3=5(3+5i)=15+25i$

$z_1(z_2z_3)=(2-i)\{(2+i)(3+5i)\}$

$=(2-i)(1+13i)=15+25i$

따라서 $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$이다.

(3) $z_1(z_2+z_3)=(2-i)\{(2+i)+(3+5i)\}$

$=(2-i)(5+6i)=16+7i$

$z_1z_2+z_1z_3=5+(2-i)(3+5i)$

$=5+6+10i-3i-5i^2=16+7i$

따라서 $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$이다.

사고력 기르기

(1) $\bar{z}=a-bi$이므로

$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$

$z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$

$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

따라서 임의의 복소수와 그 켤레복소수를 더하거나 곱하면 실수가 되고, 빼면 허수가 된다.

(2) $\frac{\bar{z}}{z}=\frac{a-bi}{a+bi}=\frac{(a-bi)^2}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{(a^2-b^2)-2abi}{a^2+b^2}$

$\frac{z}{\bar{z}}=\frac{a+bi}{a-bi}=\frac{(a+bi)^2}{(a-bi)(a+bi)}=\frac{(a^2-b^2)+2abi}{a^2+b^2}$

따라서 $\frac{\bar{z}}{z}$와 $\frac{z}{\bar{z}}$는 서로 켤레복소수이다.

8 (1) $\pm\sqrt{2}i$ (2) $\pm 2i$ (3) $\pm\frac{1}{4}i$ (4) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$

9 (1) $3\sqrt{2}i$ (2) $-3\sqrt{2}$ (3) $\sqrt{3}$ (4) $-3i$

창의 up

(1) $a=-x,\ b=-y$ $(x>0,\ y>0)$라고 하면

$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{-x}\sqrt{-y}=(\sqrt{x}i)(\sqrt{y}i)=\sqrt{xy}i^2$

$=-\sqrt{xy}=-\sqrt{ab}$

(2) $a=-x$ $(x>0)$라고 하면

$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{-x}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{x}i}=\frac{\sqrt{b}\cdot i}{\sqrt{x}i\cdot i}=\frac{\sqrt{b}i}{-\sqrt{x}}$

$=-\sqrt{\frac{b}{x}}i=-\sqrt{-\frac{b}{x}}=-\sqrt{\frac{b}{a}}$

|단원 과제|

원시 사회에서 가장 중요한 재산인 가축들의 수를 세기 시작하면서 자연수의 역사는 시작되었다.

3세기경 고대 그리스의 디오판토스(Diophantos ; ?200 ~?284)는 방정식의 답이 음수가 될 경우에는 답이 없는 것으로 취급하였다. 하지만 이탈리아의 수학자 카르다노(Cardano, G. ; 1501~1576)는 그의 유명한 저서인 “아르스 마그나”에 방정식의 일반적인 성질을 자세하고 체계적으로 서술하며 허수의 개념을 확립하였다.
1550년 이탈리아의 수학자 봄벨리(Bombelli, R. ; 1526 ~1572)가 $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$ 등을 사용하기도 하였으나 이는 수로 받아들여지지 않았고 17세기에 라이프니츠(Leibniz, G. W. ; 1646~1716)가 처음으로 허수라고 부르기 시작하였다. 이 수는 현대에 이르러 수학뿐 아니라 기계 공학이나 전기 공학 등에서 없어서는 안 될 중요한 수가 되었다.

02 이차방정식의 실근과 허근 [p. 70~71]

1 (1) $x=3\pm\sqrt{10}$ (실근) (2) $x=\frac{3\pm\sqrt{31}i}{4}$ (허근)

사고력 기르기

근의 공식에 b 대신 $2b'$을 대입하면

$$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b'\pm\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{-2b'\pm2\sqrt{b'^2-ac}}{2a}=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

03 판별식 [p. 72~74]

1 (1) 서로 다른 두 허근
(2) 서로 다른 두 실근
(3) 중근

2 (1) $k<\frac{1}{4}$ (2) $k=\frac{1}{4}$ (3) $k>\frac{1}{4}$

3 $a>-\frac{1}{2}$

사고력 기르기

a와 c의 부호가 서로 다르므로 $ac<0$
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 $D=b^2-4ac$에서 $-4ac>0$, $b^2\geq0$이므로 $D=b^2-4ac>0$이다. 따라서 a와 c의 부호가 서로 다르면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$은 서로 다른 두 실근을 가진다.

04 근과 계수의 관계 [p. 75~78]

1 (1) 합: 3, 곱: -4 (2) 합: 3, 곱: $\frac{1}{2}$

2 (1) 10 (2) -4 (3) $\frac{6}{5}$ (4) 4

3 $\sqrt{5}$

4 (1) $x^2-x-2=0$ (2) $x^2-2x+2=0$

5 (1) $(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$ (2) $(x+3-\sqrt{6})(x+3+\sqrt{6})$
(3) $(x-3i)(x+3i)$ (4) $(x-2-\sqrt{2}i)(x-2+\sqrt{2}i)$

사고력 기르기

$x^2+px+q=0$의 두 근을 α, β라고 하면
(1) $\alpha>0$, $\beta>0$이므로 $\alpha+\beta=-p>0$, $\alpha\beta=q>0$
따라서 $p<0$, $q>0$이다.
(2) $\alpha<0$, $\beta<0$이므로 $\alpha+\beta=-p<0$, $\alpha\beta=q>0$
따라서 $p>0$, $q>0$이다.
(3) $\alpha>0$, $\beta<0$이라고 하면 $\alpha+\beta$의 부호는 알 수 없고 $\alpha\beta=q<0$이다. 또 $\alpha<0$, $\beta>0$이라고 하면 $\alpha+\beta$의 부호는 알 수 없고 $\alpha\beta=q<0$이다.
따라서 $q<0$이고 p의 부호는 알 수 없다.

중단원 기초 [p. 79]

1 실수: i^2, $\sqrt{(-5)^2}$
허수: $-\sqrt{-9}$, $-4+\sqrt{3}i$

2 (1) $4-i$ (2) $6-7i$
(3) $10-11i$ (4) $\frac{8}{13}-\frac{1}{13}i$

3 (1) $x=-3$ 또는 $x=2$ (실근)
(2) $x=\frac{-1\pm\sqrt{11}i}{6}$ (허근)

4 (1) 서로 다른 두 실근 (2) 서로 다른 두 허근
(3) 서로 다른 두 실근 (4) 중근

5 (1) 합: -2, 곱: -1 (2) 합: 4, 곱: 2
(3) 합: $-\frac{1}{3}$, 곱: $-\frac{1}{3}$ (4) 합: $\frac{1}{2}$, 곱: $-\frac{1}{2}$

중단원 기본 [p.80]

1 0

2 (1) $11\sqrt{3}i$ (2) $2+\sqrt{2}i$

3 (1) $x=-5$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ (실근)

(2) $x=\frac{-7\pm\sqrt{85}}{2}$ (실근)

(3) $x=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$ (허근)

(4) $x=\frac{1}{3}$ (실근)

4 (1) $k<\frac{3}{2}$ (2) $k=\frac{3}{2}$ (3) $k>\frac{3}{2}$

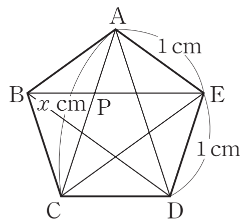
5 (1) -4 (2) 16 (3) -12 (4) -1

중단원 실력 [p.81]

1 $x=-1$일 때 $z=0$, $x=2$일 때 $z=15$

2 $-3-2i$

3 정오각형의 한 내각의 크기는 108°이고 △ABE와 △ABC는 이등변삼각형이므로
$\angle AEP=36^\circ$, $\angle EAP=72^\circ$임을 알 수 있다.
△EAP와 △ACD는 꼭지각의 크기가 36°인 이등변삼각형이므로 닮음이고, 대각선의 길이 $\overline{AC}$를 x cm라고 하면
$\overline{AC}:\overline{EA}=\overline{CD}:\overline{AP}$에서



$x:1=1:(x-1)$

$x(x-1)=1$, $x^2-x-1=0$, $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

그런데 $x>0$이어야 하므로 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

따라서 구하는 대각선의 길이는 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ cm이다.

4 $x^2-2(k+a)x+(k^2-k+b)=0$이 실수 k의 값에 관계없이 중근을 가지므로

$\frac{D}{4}=(k+a)^2-(k^2-k+b)=(2a+1)k+a^2-b=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 성립하려면

$2a+1=0$, $a^2-b=0$

따라서 $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{4}$이다.

5 이차방정식 $x^2-mx+m+2=0$의 서로 다른 두 근을 α, β $(\alpha<\beta)$라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=m$, $\alpha\beta=m+2$

$\alpha+\beta=m=\alpha\beta-2$이므로 $\alpha\beta-(\alpha+\beta)=2$

$(\alpha-1)(\beta-1)=3$

문제의 조건에서 α, β $(\alpha<\beta)$는 정수이므로

$\alpha-1=1$, $\beta-1=3$ 또는 $\alpha-1=-3$, $\beta-1=-1$

$\alpha=2$, $\beta=4$ 또는 $\alpha=-2$, $\beta=0$

따라서 구하는 m의 값은 $m=6$ 또는 $m=-2$이다.

2 이차방정식과 이차함수

01 이차함수와 이차방정식의 관계 [p.83~85]

1 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 한 점에서 만난다(접한다).

(3) 만나지 않는다.

(4) 서로 다른 두 점에서 만난다.

2 (1) $k<\frac{1}{4}$ (2) $k=\frac{1}{4}$ (3) $k>\frac{1}{4}$

3 (1) $x=-1$ 또는 $x=2$ (2) $a=\frac{1}{2}$, $b=-2$

4 $a=\frac{5}{2}$, $b=4$

02 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 [p.86~88]

1 (1) 1 (2) 0

2 (1) $a<\frac{5}{4}$ (2) $a=\frac{5}{4}$ (3) $a>\frac{5}{4}$

3 $y=2x-3$

03 이차함수의 최대, 최소 [p.89~92]

1 (1) 최댓값은 5이고, 최솟값은 없다.

(2) 최솟값은 $-\frac{1}{2}$이고, 최댓값은 없다.

2 (1) 최댓값은 1이고, 최솟값은 -1이다.

(2) 최댓값은 -4이고, 최솟값은 -37이다.

3 가로: 5 m, 세로: 5 m

4 450톤

사고력 기르기

$a+b=k$ (k는 일정)로 놓으면 $b=k-a$이므로

$ab=a(k-a)=-a^2+ka=-\left(a-\frac{k}{2}\right)^2+\frac{k^2}{4}$

따라서 $a=b=\frac{k}{2}$일 때 ab가 최대가 된다.

| 단원 과제 |

$y=ax-bx^2=-b\left(x^2-\frac{a}{b}x\right)=-b\left(x-\frac{a}{2b}\right)^2+\frac{a^2}{4b}$

농구공이 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 $\frac{a^2}{4b}$ m이므로

농구공을 던지는 속력 a의 값이 2배가 되면 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 4배가 된다.

중단원 기초 [p.93]

1 (1) 서로 다른 두 점에서 만나고, 이때의 x좌표는 -1, 2이다.

(2) 서로 다른 두 점에서 만나고, 이때의 x좌표는 -4, 2이다.

(3) 한 점에서 만나고(접하고), 이때의 x좌표는 -1이다.

(4) 만나지 않는다.

2 $a=-2$ 또는 $a=2$

3 (1) $k>-2$ (2) $k=-2$ (3) $k<-2$

4 (1) 최솟값은 1이고, 최댓값은 없다.

(2) 최댓값은 $\frac{1}{4}$이고, 최솟값은 없다.

5 (1) 최댓값은 11이고, 최솟값은 3이다.

(2) 최댓값은 1이고, 최솟값은 -14이다.

중단원 기본 [p.94]

1 -1

2 8

3 $0<m<1$

4 7

5 (1) -2 (2) -2

중단원 실력 [p.95]

1 0

2 직선 $y=2x-2$가 평행이동하여 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 최초로 만날 때의 접점이 선분 AB의 길이를 최소가 되도록 하는 점 A이다.

기울기가 2이고 이차함수 $y=x^2$에 접하는 직선의 방정식을 $y=2x+a$로 놓고 $y=x^2$에 대입하여 정리하면

$x^2-2x-a=0$

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot(-a)=1+a=0,\ a=-1$

$y=x^2$과 $y=2x-1$의 그래프의 접점의 x좌표를 구하면

$x^2-2x+1=(x-1)^2=0,\ x=1$

따라서 선분 AB의 길이를 최소가 되도록 하는 점 A의 좌표는 A(1, 1)이다.

3 4

4 $x+y=3$에서 $y=3-x$

$2x^2+y^2=2x^2+(3-x)^2=3(x-1)^2+6$

$x\geq0,\ y\geq0$에서 $x\geq0,\ 3-x\geq0$이므로 $0\leq x\leq3$

따라서 최댓값은 $x=3$일 때 18이고, 최솟값은 $x=1$일 때 6이다.

5 $2x+4y=40$이므로 $y=10-\frac{1}{2}x$

전체 건물의 밑면의 넓이는

$xy=x\left(10-\frac{1}{2}x\right)=-\frac{1}{2}x^2+10x=-\frac{1}{2}(x-10)^2+50$

$x>0,\ y>0$이므로 $x>0,\ 10-\frac{1}{2}x>0$에서 $0<x<20$

따라서 $x=10$일 때 전체 건물의 밑면의 넓이가 최대가 된다.

3 여러 가지 방정식

01 삼차방정식과 사차방정식 [p. 97~100]

1 (1) $x=-2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$
(2) $x=4$ 또는 $x=-2\pm2\sqrt{3}i$
(3) $x=-3$
(4) $x=2$

2 (1) $x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$
(2) $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\pm i$
(3) $x=\pm\sqrt{3}$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}i$
(4) $x=\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=\pm3$

3 (1) $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$
(2) $x=-3$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$
(3) $x=-1$(중근) 또는 $x=\pm\sqrt{2}$
(4) $x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

4 (1) $p=-2$, $q=4$
(2) $x=-2$ 또는 $x=1-i$

사고력 기르기

ω는 $x^3-1=0$의 허근이므로
$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$에서
$\omega^2+\omega+1=0$
(1) ω는 $x^3=1$의 근이므로 $\omega^3=1$
$\omega^{100}=(\omega^3)^{33}\cdot\omega=1^{33}\cdot\omega=1\cdot\omega=\omega$
$\omega^{200}=(\omega^3)^{66}\cdot\omega^2=1^{66}\cdot\omega^2=1\cdot\omega^2=\omega^2$
$\omega^{300}=(\omega^3)^{100}=1^{100}=1$
따라서 $\omega^{100}+\omega^{200}+\omega^{300}=\omega+\omega^2+1=0$이다.
(2) $\omega^2+\omega+1=0$에서 $\omega^2+1=-\omega$이므로
$$\omega+\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^2+1}{\omega}=\frac{-\omega}{\omega}=-1$$

02 연립방정식 [p. 101~106]

1 (1) $x=1$, $y=2$, $z=3$
(2) $x=3$, $y=2$, $z=-1$

2 (1) $x=-2$, $y=3$, $z=4$ (2) $x=y=z=5$

3 1점 슛: 13회, 2점 슛: 12회, 3점 슛: 8회

4 (1) $x=k$, $y=-3k+2$,
$z=-5k+1$ (k는 임의의 실수)
(2) 해는 없다.

5 (1) $\begin{cases}x=-7\\y=22\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}$
(2) $\begin{cases}x=-2\\y=5\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=5\\y=-2\end{cases}$
(3) $\begin{cases}x=4\\y=-3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-3\\y=4\end{cases}$

6 $\sqrt{34}$ cm

7 (1) $\begin{cases}x=\sqrt{2}\\y=\sqrt{2}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-\sqrt{2}\\y=-\sqrt{2}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}$
(2) $\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-3\\y=-1\end{cases}$

8 (1) $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}$
(2) $\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-3\\y=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=i\\y=2i\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-i\\y=-2i\end{cases}$

| 단원 과제 |

탄수화물, 지방, 단백질 1 g이 낼 수 있는 열량을 각각 x kcal, y kcal, z kcal라고 하면
$$\begin{cases}200x+20y+230z=1900 & \cdots\cdots ①\\200x+40y+210z=2000 & \cdots\cdots ②\\240x+50y+260z=2450 & \cdots\cdots ③\end{cases}$$
②−①에서 $20y-20z=100$이므로
$y-z=5$ ······ ④
③×5−②×6에서 $10y+40z=250$이므로
$y+4z=25$ ······ ⑤
④, ⑤를 연립하여 풀면 $y=9$, $z=4$
$y=9$, $z=4$를 ①에 대입하여 풀면 $x=4$
따라서 탄수화물, 지방, 단백질 1 g이 낼 수 있는 열량은 각각 4 kcal, 9 kcal, 4 kcal이다.

중단원 기초 [p.107]

1 (1) $x=0$ 또는 $x=\pm3$

(2) $x=3$ 또는 $x=\frac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

(3) $x=\pm1$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

(4) $x=\pm2$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}i$

2 (1) $x=1$ 또는 $x=-2$ (2) $x=2$ 또는 $x=-1\pm i$

(3) $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

(4) $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{2}i$

3 (1) $x=1,\ y=-2,\ z=-3$

(2) $x=4,\ y=0,\ z=-1$

4 (1) $\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=1+\sqrt{2}\\y=1-\sqrt{2}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1-\sqrt{2}\\y=1+\sqrt{2}\end{cases}$

5 $\begin{cases}x=\sqrt{10}\\y=\sqrt{10}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-\sqrt{10}\\y=-\sqrt{10}\end{cases}$

또는 $\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-4\\y=-2\end{cases}$

중단원 기본 [p.108]

1 (1) $x=-3$ 또는 $x=1$ 또는 $x=-1\pm i$

(2) $x=-2$ 또는 $x=6$ 또는 $x=2\pm3\sqrt{2}$

2 (1) $a=-5,\ b=2$ (2) $a=-2,\ b=-4$

3 3

4 (1) $x=2,\ y=-1,\ z=-2$

(2) $x=3,\ y=-1,\ z=1$

(3) $\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x=\sqrt{10}\\y=\sqrt{10}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-\sqrt{10}\\y=-\sqrt{10}\end{cases}$

또는 $\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-2\\y=-3\end{cases}$

5 6 cm, 8 cm

중단원 실력 [p.109]

1 주어진 삼차방정식이 중근 $x=2$를 가지므로 상수 k에 대하여

$x^3+ax^2-8x+4b$

$=(x-2)^2(x-k)=(x^2-4x+4)(x-k)$

$=x^3+(-4-k)x^2+(4k+4)x-4k$

양변의 계수를 비교하면

$-4-k=a,\ 4k+4=-8,\ -4k=4b$

따라서 $k=-3$이므로 $a=-1,\ b=3$이다.

2 (1) -1 (2) 1 (3) 0

3 세 방정식을 변끼리 모두 더하면

$(a+2)(x+y+z)=3$

(ⅰ) $a=-2$일 때 $0\cdot(x+y+z)=3$이므로 해가 없다.

(ⅱ) $a\neq-2$일 때 $x+y+z=\frac{3}{a+2}$

• $a=1$이면 주어진 세 방정식이 모두 $x+y+z=1$이 되어 해가 무수히 많다.

• $a\neq1$이면 한 쌍의 해를 가진다.

(1) $a\neq-2$이고 $a\neq1$

(2) $a=1$

(3) $a=-2$

4 설탕물 A, B, C의 농도를 각각 x %, y %, z %라고 할 때, A와 B를 각각 100 g씩 혼합하면 15 %가 되므로

$100\times\frac{x}{100}+100\times\frac{y}{100}=200\times\frac{15}{100}$에서

$x+y=30$ …… ①

A와 C를 각각 100 g, 200 g씩 혼합하면 20 %가 되므로

$100\times\frac{x}{100}+200\times\frac{z}{100}=300\times\frac{20}{100}$에서

$x+2z=60$ …… ②

B와 C를 각각 100 g, 300 g씩 혼합하면 20 %가 되므로

$100\times\frac{y}{100}+300\times\frac{z}{100}=400\times\frac{20}{100}$에서

$y+3z=80$ …… ③

①, ②, ③을 연립하여 풀면 $x=16,\ y=14,\ z=22$

따라서 설탕물 A, B, C의 농도는 각각 16 %, 14 %, 22 %이다.

5 가로의 길이: 8 cm, 세로의 길이: 6 cm

4 여러 가지 부등식

01 부등식 [p. 111~114]

1 $a>b$이고 $c>0$이므로 $ac>bc$ (부등식의 기본 성질 (3))
$c>d$이고 $b>0$이므로 $bc>bd$ (부등식의 기본 성질 (3))
따라서 $ac>bd$이다. (부등식의 기본 성질 (1))

2 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
이때 $a<0$, $b<0$이므로 $a+b<0$
$a<b$이므로 $a-b<0$
두 음수의 곱은 양수이므로
$(a+b)(a-b)>0$, $a^2-b^2>0$
따라서 $a^2>b^2$이다.

3 (1) $-1<x<3$ (2) $-3\le x\le 2$
(3) $x\le -1$ 또는 $x\ge 6$ (4) $x<3$ 또는 $x>9$

4 (1) $-4\le x\le 3$ (2) $x<0$ 또는 $x>6$

| 단원 과제 |

$|\lambda-580|<10$이므로 $-10<\lambda-580<10$, $570<\lambda<590$
따라서 나트륨의 불꽃 반응 색은 노랑이다.

02 이차함수와 이차부등식의 관계 [p. 115~120]

1 (1) $5<x<6$
(2) $x<-7$ 또는 $x>1$
(3) $-\frac{1}{2}\le x\le 4$
(4) $x\le 2-\sqrt{3}$ 또는 $x\ge 2+\sqrt{3}$

2 10초

3 (1) $x\ne -1$인 모든 실수 (2) 해는 없다.
(3) 모든 실수 (4) $x=\frac{3}{2}$

4 (1) 해는 없다. (2) 모든 실수

5 $-8<m<0$

6 $-1<x<7$

사고력 기르기

$a<0$, $b^2-4ac<0$

7 (1) $\frac{1}{2}<x<4$
(2) $-4\le x\le -2$ 또는 $2\le x\le 5$
(3) $0\le x<2$ 또는 $3<x\le 4$
(4) $1+\sqrt{6}<x<8$

8 $0<a<1$

중단원 기초 [p. 121]

1 (1) ㄷ (2) ㄴ (3) ㄹ

2 (1) $x\le -8$ 또는 $x\ge 2$ (2) $-3<x<4$
(3) $-1\le x\le \frac{1}{3}$ (4) $x<-4$ 또는 $x>8$

3 (1) $-3\le x\le 4$ (2) $x<-5$ 또는 $x>2$
(3) $x=4$ (4) 모든 실수

4 (1) $3\le x<4$
(2) $-1\le x<1$ 또는 $x>3$
(3) $-5\le x\le -1$ 또는 $2\le x\le 3$
(4) $-3<x\le 1$

중단원 기본 [p. 122]

1 $x>\frac{4}{5}$

2 $x<-\frac{1}{2}$ 또는 $x>1$

3 $-1<k<0$

4 (1) $3\le x<6$
(2) $-5<x\le -2$
(3) $x\le -\frac{3}{4}$ 또는 $1\le x<4$
(4) $-1<x\le 1$ 또는 $2\le x<4$

5 $a=2$, $b=-2$

중단원 실력 [p. 123]

1 (1) $a<x$, $c<y$이므로 $a+c<x+y$
$x<b$, $y<d$이므로 $x+y<b+d$
따라서 $a+c<x+y<b+d$이다.

(2) $c<y<d$이므로　$-d<-y<-c$

(1)에 의하여　$a-d<x-y<b-c$

(3) $a=-3$, $b=-1$, $c=2$, $d=10$이라고 하면 $ac=-6>-10=bd$이므로 $ac<xy<bd$는 성립하지 않는다.

따라서 항상 옳은 것은 (1), (2)이다.

2 $a=2$, $b=\frac{1}{2}$

3 주어진 연립이차부등식의 해는　$5<x<6$

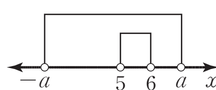
$x^2-a^2<0$의 해는 $(x+a)(x-a)<0$에서

$a>0$일 때 $-a<x<a$,

$a<0$일 때 $a<x<-a$이다.

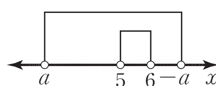
(ⅰ) $a>0$일 때, $5<x<6$이 $-a<x<a$를 만족시켜야 하므로 $-a\le5$이고 $a\ge6$

따라서 $a\ge6$이다.



(ⅱ) $a<0$일 때, $5<x<6$이 $a<x<-a$를 만족시켜야 하므로 $a\le5$이고 $-a\ge6$

따라서 $a\le-6$이다.



(ⅰ), (ⅱ)에 의하여　$a\ge6$ 또는 $a\le-6$

4 삼각형에서 가장 긴 변의 길이는 나머지 두 변의 길이의 합보다 작으므로 $x+2<x+(x+1)$에서

$x>1$　…… ①

둔각삼각형에서 가장 긴 변의 길이의 제곱은 나머지 두 변의 길이의 제곱의 합보다 크므로

$(x+2)^2>x^2+(x+1)^2$, $(x+1)(x-3)<0$

$-1<x<3$　…… ②

①, ②를 동시에 만족시키는 x값의 범위는　$1<x<3$

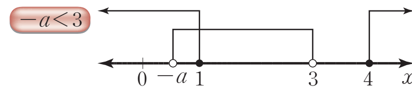
따라서 구하는 자연수 x는 2로 1개이다.

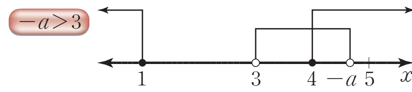
5 $x^2-5x+4\ge0$의 해는　$x\le1$ 또는 $x\ge4$

$x^2+(a-3)x-3a<0$의 해는 $(x+a)(x-3)<0$에서

$-a<3$일 때 $-a<x<3$, $-a>3$일 때 $3<x<-a$

두 이차부등식을 동시에 만족시키는 정수 x가 오직 한 개 존재하므로 두 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.





따라서 $0\le-a<1$ 또는 $4<-a\le5$이므로

$-1<a\le0$ 또는 $-5\le a<-4$

대/단/원 평가 문제 [p. 126~127]

1 ①	**2** ③	**3** ②	**4** ③	**5** ②
6 ③	**7** ⑤	**8** ③	**9** ②	**10** ④
11 ④	**12** 24	**13** $-6<m<2$		

14 6, 8, 10

15 (1) $x=-3$ 또는 $x=1$ (2) $-3<x<1$

16 풀이 참조　**17** 풀이 참조

11 주어진 연립이차부등식의 해가 $1<x\le3$이므로

$x=3$은 $x^2+ax-b=0$의 근이고,

$x=1$은 $x^2+bx+2a=0$의 근이다.

따라서 x의 값을 각 방정식에 대입하면

$9+3a-b=0$, $1+b+2a=0$

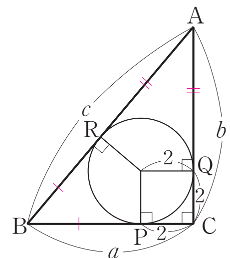
두 방정식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=3$이므로

$b-a=3-(-2)=5$

14 오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 ABC의 세 변의 길이를 a, b, c라고 하면

$\overline{AB}=\overline{AR}+\overline{BR}=\overline{AQ}+\overline{BP}$

이므로



$c=(b-2)+(a-2)$

$a+b-c=4$　…… ①

또 삼각형의 둘레의 길이에서

$a+b+c=24$　…… ②

①+②에서　$2a+2b=28$, $a+b=14$

②−①에서　$2c=20$, $c=10$

그런데 $a^2+b^2=c^2$이므로 $a^2+(14-a)^2=100$

$2a^2-28a+96=0$, $(a-6)(a-8)=0$

$\begin{cases} a=6 \\ b=8 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a=8 \\ b=6 \end{cases}$

따라서 삼각형의 세 변의 길이는 6, 8, 10이다.

15 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 α, 1이라고 하면 대칭축이 $x=-1$이므로

$\dfrac{\alpha+1}{2}=-1$, $\alpha=-3$

(1) 방정식 $f(x)=0$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표이므로 $x=-3$ 또는 $x=1$

(2) 부등식 $f(x)<0$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 아래에 있는 x값의 범위이므로 $-3<x<1$

16 주어진 방정식에 $x=\sqrt{2}i$를 대입하면

$(\sqrt{2}i)^3-3(\sqrt{2}i)^2+a(\sqrt{2}i)+b=0$

$-2\sqrt{2}i+6+a\sqrt{2}i+b=0$

$(-2\sqrt{2}+a\sqrt{2})i+6+b=0$

a, b가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$-2\sqrt{2}+a\sqrt{2}=0$, $6+b=0$에서 $a=2$, $b=-6$

17 $x^2-ax+1=0$이 실근을 가지므로

$D=a^2-4\geq0$, $(a+2)(a-2)\geq0$

$a\leq-2$ 또는 $a\geq2$ …… ①

$x^2+(a-1)x+1=0$이 허근을 가지므로

$D=(a-1)^2-4<0$, $a^2-2a-3<0$,

$(a+1)(a-3)<0$

$-1<a<3$ …… ②

①과 ②를 동시에 만족시켜야 하므로 구하는 실수 a값의 범위는 $2\leq a<3$

III 도형의 방정식

| 준 | 비 | 학 | 습 | [p. 131]

1 13

2 (1) $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$

3 (1) (2) $y=\dfrac{4}{9}(x-3)^2-2$

1 평면좌표

01 두 점 사이의 거리 [p. 133~135]

1 (1) 4 (2) 6

2 (1) $\sqrt{5}$ (2) $4\sqrt{2}$ (3) 5 (4) $\sqrt{17}$

3 $\angle B=90°$인 직각이등변삼각형

4 $P(0, -2)$

| 단원 과제 |

독도와 제주도의 경도의 차는 5°, 위도의 차는 4°이다.
따라서 독도와 제주도 사이의 거리는
$\sqrt{(5\times99)^2+(4\times111)^2}=\sqrt{442161}$, 약 665 km이다.

02 선분의 내분과 외분 [p. 136~142]

1 (1) P(0) (2) Q(2) (3) M(1)

2 (1) P(19) (2) Q(−21)

사고력 기르기

$m=n$이면 선분 AB의 연장선 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}:\overline{BP}=1:1$이므로 두 점 A, B는 같은 점이 된다. 따라서 점 P는 존재하지 않는다.

3 (1) $P(6,\ 2)$, $Q(21,\ 17)$, $M(5,\ 1)$

(2) $P\left(\frac{1}{4},\ 3\right)$, $Q(-11,\ 3)$, $M(1,\ 3)$

4 (1) $G(2,\ 2)$ (2) $G(1,\ 3)$

5 $G(0, 3)$

사고력 기르기

점 C의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면 $\frac{x_1+x_2+x}{3}=0$,

$\frac{y_1+y_2+y}{3}=0$이므로 $x=-(x_1+x_2)$, $y=-(y_1+y_2)$

따라서 점 C의 좌표는 $C(-x_1-x_2,\ -y_1-y_2)$이다.

중단원 기초 [p. 143]

1 (1) 3 (2) 9 (3) 5 (4) 10

2 (1) 2 (2) 4 (3) $2\sqrt{2}$ (4) $\sqrt{29}$

3 (1) $P(2)$ (2) $Q(15)$ (3) $M(1)$

4 (1) $P(2,\ 3)$ (2) $Q(0,\ 1)$ (3) $M\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$

5 (1) $P(4,\ -7)$ (2) $Q\left(-\frac{13}{2},\ 0\right)$

중단원 기본 [p. 144]

1 $1,\ -11$

2 $\angle C=90°$인 직각이등변삼각형

3 $a=1,\ b=-1$

4 $a=4,\ b=3$

5 $G(0,\ -2)$

중단원 실력 [p. 145]

1 $P(1,\ 2)$

2 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=(a+c)^2+b^2+(a-c)^2+b^2$

$=2(a^2+b^2+c^2)$

$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=a^2+b^2+c^2$

따라서 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$이 성립한다.

3 두 자동차 A, B의 t초 후의 좌표는 각각 $(100-10t,\ 0)$, $(0,\ 20t)$이므로 두 자동차 사이의 거리는

$\sqrt{(100-10t)^2+(-20t)^2}$

$=\sqrt{500t^2-2000t+10000}$

$=\sqrt{500(t-2)^2+8000}$

따라서 두 자동차 A, B 사이의 거리는 2초 후에 최소가 되고, 그때의 거리는 $\sqrt{8000}=40\sqrt{5}$(m)이다.

4 선분 AB를 $t:(1-t)$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{-2t+3(1-t)}{t+(1-t)},\ \frac{6t-2(1-t)}{t+(1-t)}\right)=(3-5t,\ -2+8t)$

이 점이 제1사분면에 속하므로 $3-5t>0$이고 $-2+8t>0$

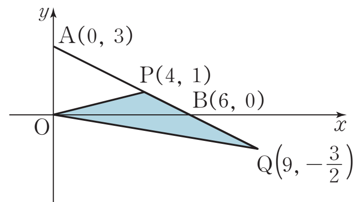
따라서 $\frac{1}{4}<t<\frac{3}{5}$이다.

5 점 P의 좌표는 $\left(\frac{2\cdot6+1\cdot0}{2+1},\ \frac{2\cdot0+1\cdot3}{2+1}\right)$이므로

$P(4,\ 1)$

점 Q의 좌표는 $\left(\frac{3\cdot6-1\cdot0}{3-1},\ \frac{3\cdot0-1\cdot3}{3-1}\right)$이므로

$Q\left(9,\ -\frac{3}{2}\right)$



따라서 삼각형 OPQ는 위 그림과 같으므로 구하는 넓이는

$\triangle OPQ=\triangle OBP+\triangle OBQ$

$=\frac{1}{2}\times6\times1+\frac{1}{2}\times6\times\frac{3}{2}=\frac{15}{2}$

2 직선의 방정식

01 직선의 방정식 [p. 147~150]

1 (1) $y=-3x+6$ (2) $y=2x+2$ (3) $y=1$

2 (1) $y=x+3$ (2) $y=\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$

(3) $y=-2$ (4) $x=3$

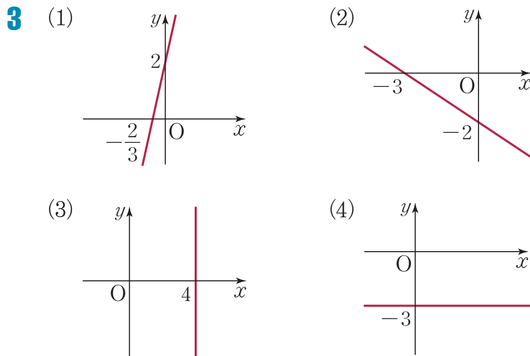
사고력 기르기

두 점 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-0=\frac{b-0}{0-a}(x-a)$에서 $y=-\frac{b}{a}x+b$, $\frac{b}{a}x+y=b$

$b\neq0$이므로 양변을 b로 나누면 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

3 (1) (2) (3) (4)



| 단원 과제 |

두 점 $(2000,\ 10.5)$, $(2010,\ 10.7)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-10.5=\frac{0.2}{10}(x-2000)$에서 $y=0.02x-29.5$

02 두 직선의 평행과 수직 [p. 151~158]

1 (1) ㉠, ㉢ (2) ㉣

2 (1) $y=x+3$ (2) $y=\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$

사고력 기르기

$ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

$a'x+b'y+c'=0$에서 $y=-\frac{a'}{b'}x-\frac{c'}{b'}$

두 직선이 평행하므로 $-\frac{a}{b}=-\frac{a'}{b'}$, $-\frac{c}{b}\neq-\frac{c'}{b'}$

따라서 $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}$, $\frac{b'}{b}\neq\frac{c'}{c}$이므로 $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}\neq\frac{c'}{c}$이다.

3 (1) $y=-2x+7$

(2) $y=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$

4 $y=2x-3$

사고력 기르기

$ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

$a'x+b'y+c'=0$에서 $y=-\frac{a'}{b'}x-\frac{c'}{b'}$

두 직선이 수직이므로 $\left(-\frac{a}{b}\right)\times\left(-\frac{a'}{b'}\right)=-1$

따라서 $aa'+bb'=0$이다.

5 (1) $2\sqrt{5}$ (2) 2

(3) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ (4) 2

6 (1) $2\sqrt{2}$ (2) $\frac{5\sqrt{26}}{13}$

7 (1) $y=-2$ 또는 $y=-\frac{4}{3}x-\frac{10}{3}$

(2) $y=2x\pm5\sqrt{2}$

창의 up

(1) 직선 AB의 방정식은 $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$에서

$(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y-(x_1y_2-x_2y_1)=0$

따라서 점 O와 직선 AB 사이의 거리는

$\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$

(2) 선분 AB를 삼각형 OAB의 밑변으로 하면

높이는 점 O와 직선 AB 사이의 거리이므로

$S=\frac{1}{2}\times\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$\times\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$

$=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$

중단원 기초 [p.159]

1 (1) $y=3x-10$ (2) $y=4$

2 (1) $y=2x+1$ (2) $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

3 (1) $\frac{1}{2}$ (2) -2

4 (1) $y=5x-2$ (2) $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$

5 (1) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ (2) $\sqrt{5}$

중단원 기본 [p.160]

1 9

2 $a=3$일 때 $y=-2x+11$,

$a=7$일 때 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{29}{3}$

3 $y=2x-7$

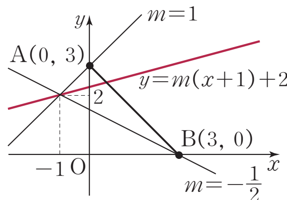
4 $-\frac{2}{3}$

5 $\sqrt{5}$

중단원 실력 [p.161]

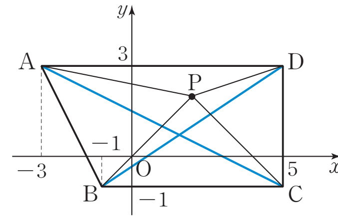
1 직선 $y=m(x+1)+2$는 m의 값에 관계없이 점 $(-1,\ 2)$를 지난다.
두 점 $(-1,\ 2)$, $\mathrm{A}(0,\ 3)$을 지나는 직선의 기울기는 1, 두 점 $(-1,\ 2)$, $\mathrm{B}(3,\ 0)$을 지나는 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.
오른쪽 그림에서 직선 $y=m(x+1)+2$가 선분 AB와 만나는 기울기 m의 범위는

$-\frac{1}{2}\le m\le 1$



2 점 $\mathrm{A}(-3,\ -1)$을 지나는 직선이 선분 BC의 중점을 지나면 삼각형 ABC의 넓이를 이등분한다.
선분 BC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1+5}{2},\ \frac{6+0}{2}\right)$, 즉 $(3,\ 3)$
이므로 구하는 직선의 방정식은 $y=\frac{2}{3}x+1$

3



사각형 ABCD의 내부의 점 P에 대하여
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{CP}}\ge\overline{\mathrm{AC}}$ …… ①
$\overline{\mathrm{BP}}+\overline{\mathrm{DP}}\ge\overline{\mathrm{BD}}$ …… ②
이고 ①, ②에서 등호는 각각 점 P가 선분 AC 위의 점일 때와 선분 BD 위의 점일 때 성립하므로
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}+\overline{\mathrm{CP}}+\overline{\mathrm{DP}}\ge\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BD}}$
이때 등호는 점 P가 선분 AC와 선분 BD의 교점일 때 성립하므로 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}+\overline{\mathrm{CP}}+\overline{\mathrm{DP}}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P는 직선 AC와 직선 BD의 교점이다.
직선 AC의 방정식은 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$
직선 BD의 방정식은 $y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$
이 두 방정식을 연립하여 풀면 $x=\frac{11}{7},\ y=\frac{5}{7}$
따라서 구하는 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}\left(\frac{11}{7},\ \frac{5}{7}\right)$이다.

4 각을 이등분하는 직선 위의 점을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라고 하면 점 P와 두 직선 $2x+y+2=0$, $x-2y+1=0$ 사이의 거리는 서로 같다.
$\frac{|2a+b+2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|a-2b+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$
$|2a+b+2|=|a-2b+1|$
$2a+b+2=a-2b+1$ 또는 $2a+b+2=-a+2b-1$
즉, 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 방정식 $a+3b+1=0$ 또는 $3a-b+3=0$을 항상 만족시키므로 구하는 직선의 방정식은 $x+3y+1=0$ 또는 $3x-y+3=0$

5 $\frac{12}{5}$

3 원의 방정식

01 원의 방정식 [p. 163~166]

1 (1) $(x-2)^2+(y-5)^2=9$ (2) $x^2+y^2=25$

2 (1) $(x+1)^2+(y-2)^2=1$ (2) $(x-2)^2+(y-3)^2=13$
(3) $(x+1)^2+(y-3)^2=8$ (4) $(x+1)^2+(y-1)^2=25$

3 (1) 중심이 점 $(1,\ 2)$, 반지름의 길이가 3인 원
(2) 중심이 점 $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원

4 $-5<k<1$

5 (1) 중심: $\left(2,\ -\frac{3}{2}\right)$, 반지름의 길이: $\frac{5}{2}$
(2) 중심: $(2,\ -3)$, 반지름의 길이: 5

사고력 기르기

$\overline{PA}=2\overline{PB}$이므로 $\overline{PA}^2=4\overline{PB}^2$
점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면
$(x+4)^2+y^2=4\{(x+1)^2+y^2\}$
이 식을 정리하면 구하는 도형의 방정식은 $x^2+y^2=4$

02 원과 직선의 위치 관계 [p. 167~172]

1 (1) 0 (2) 2 (3) 1 (4) 1

2 (1) $-2<k<2$
(2) $k=-2$ 또는 $k=2$
(3) $k<-2$ 또는 $k>2$

3 $-\sqrt{3}<k\le-1$ 또는 $1\le k<\sqrt{3}$

사고력 기르기

원 $x^2+y^2=r^2$의 중심과 직선 $y=mx+n$, 즉
$mx-y+n=0$ 사이의 거리를 d라고 하면

$$d=\frac{|m\times0-0+n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}$$

이때 원과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.

(i) $\frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}<r$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.
또 서로 다른 두 점에서 만나면 $\frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}<r$이다.

(ii) $\frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}=r$이면 한 점에서 만난다(접한다).
또 한 점에서 만나면(접하면) $\frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}=r$이다.

(iii) $\frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}>r$이면 만나지 않는다.
또 만나지 않으면 $\frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}>r$이다.

4 $y=-\sqrt{3}x\pm6$

5 $y=-\frac{1}{2}x\pm\sqrt{5}$

6 (1) $x+3y=10$ (2) $y=5$

7 $3x-4y+5=0$ 또는 $x=1$

| 단원 과제 |

주어진 원의 방정식은 $x^2+y^2=4$이므로 접점을 $(x_1,\ y_1)$이라고 하면 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=4$
이 접선이 점 $(0,\ 4)$를 지나므로 $4y_1=4$, $y_1=1$
한편 접점 $(x_1,\ y_1)$, 즉 $(x_1,\ 1)$은 원 $x^2+y^2=4$ 위에 있으므로 $x_1^2+1=4$이므로 $x_1^2=3$, $x_1=\pm\sqrt{3}$
따라서 직선 l의 방정식은 $-\sqrt{3}x+y=4$, 직선 m의 방정식은 $\sqrt{3}x+y=4$이고, 접점 P의 좌표는 $\mathrm{P}(-\sqrt{3},\ 1)$,
접점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}(\sqrt{3},\ 1)$이다.

중단원 기초 [p. 173]

1 (1) $(x-1)^2+(y-2)^2=9$ (2) $(x-2)^2+(y-4)^2=25$

2 (1) 중심: $(-2,\ 0)$, 반지름의 길이: 1
(2) 중심: $(3,\ -1)$, 반지름의 길이: 2

3 (1) 2 (2) 0

4 $y=-2x\pm2\sqrt{5}$

5 (1) $4x-3y=25$ (2) $-3x+\sqrt{3}y=12$

중단원 기본 [p. 174]

1 $(x-1)^2+(y-2)^2=18$

2 $k<0$ 또는 $k>2$

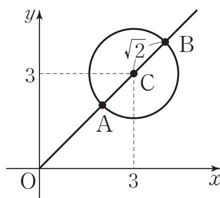
3 $m<-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $m>\frac{\sqrt{3}}{3}$

4 $y=2x\pm3\sqrt{5}$ **5** $\frac{1}{7}$, 1

중단원 실력 [p.175]

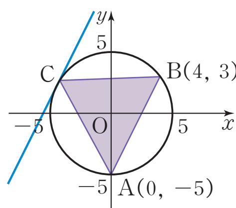
1 중심: (5, 5), 반지름의 길이: $2\sqrt{5}$

2 $x^2+y^2-6x-6y+16=0$을 변형하면
$(x-3)^2+(y-3)^2=2$
따라서 점 P는 중심이 C(3, 3)이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원 위에 있다.



오른쪽 그림에서
$\overline{OC}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$이고, 선분 OP의 길이는 점 P가 A의 위치에 있을 때 최소, B의 위치에 있을 때 최대이므로
$m=\overline{OC}-\overline{AC}=2\sqrt{2}$
$M=\overline{OC}+\overline{CB}=4\sqrt{2}$
따라서 $mM=16$이다.

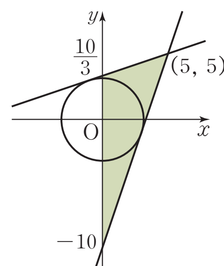
3 삼각형 ABC의 넓이는 점 C에서의 접선이 직선 AB에 평행할 때 최대가 된다. 직선 AB의 기울기는 2이므로 기울기가 2이고 점 C를 지나는 접선의 방정식을 구하면 $y=2x+5\sqrt{5}$



점 A(0, −5)와 직선 $y=2x+5\sqrt{5}$ 사이의 거리는
$\frac{|0+5+5\sqrt{5}|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=5+\sqrt{5}$이므로 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값은
$\frac{1}{2}\times\sqrt{(4-0)^2+\{3-(-5)\}^2}\times(5+\sqrt{5})=10\sqrt{5}+10$

4 주어진 원의 중심을 점 C라고 하면 직선 AC의 기울기는
$\frac{0-(-3)}{2-1}=3$이고, 점 A에서의 접선은 직선 AC와 수직이다.
따라서 구하는 접선의 방정식은 $y-0=-\frac{1}{3}(x-2)$,
즉 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$이다.

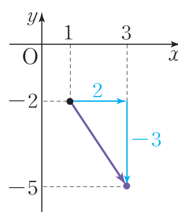
5 점 (5, 5)에서 원 $x^2+y^2=10$에 그은 접선의 방정식을 구하면
$3x-y=10$ 또는 $-x+3y=10$
따라서 이 두 접선의 y절편은
각각 −10, $\frac{10}{3}$이므로 구하는 삼각형의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\left\{\frac{10}{3}-(-10)\right\}\times5=\frac{100}{3}$

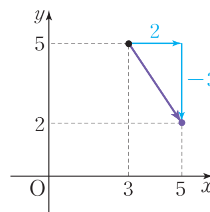


4 도형의 이동

01 평행이동 [p.177~180]

1 (1) (3, −5) (2) (5, 2)





2 (1) P(4, −5) (2) P(3, −7)

3 (1) $2x+3y-1=0$ (2) $y=x^2-6x+4$

4 $a=4$, $b=-6$

5 $a=2$, $b=-4$

6 $\pm\sqrt{2}$

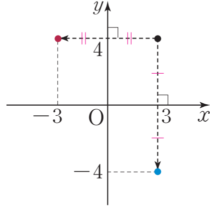
사고력 기르기

직선 $y=mx+n$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면
$y-b=m(x-a)+n$, $y=mx-ma+n+b$
따라서 직선을 평행이동하여도 기울기는 변하지 않는다.
원 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면
$(x-a-p)^2+(y-b-q)^2=r^2$
따라서 원을 평행이동하여도 반지름의 길이는 변하지 않는다.

02 대칭이동 [p.181~186]

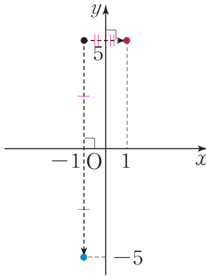
1 (1) x축에 대하여 대칭이동: $(3,\ -4)$

y축에 대하여 대칭이동: $(-3,\ 4)$

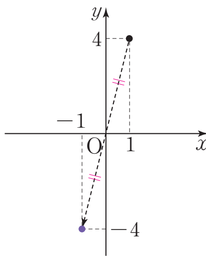


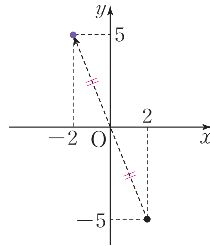
(2) x축에 대하여 대칭이동: $(-1,\ -5)$

y축에 대하여 대칭이동: $(1,\ 5)$



2 (1) $(-1,\ -4)$ (2) $(-2,\ 5)$

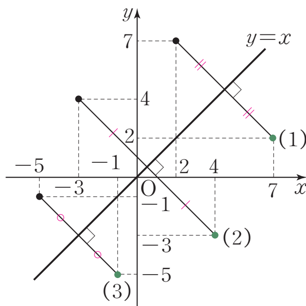




3 (1) $(7,\ 2)$

(2) $(4,\ -3)$

(3) $(-1,\ -5)$

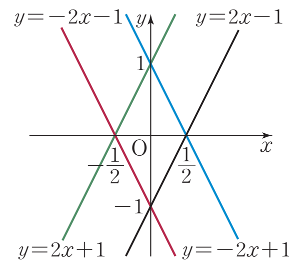


4 $\sqrt{106}$

5 (1) x축에 대하여 대칭이동: $y=-2x+1$

y축에 대하여 대칭이동: $y=-2x-1$

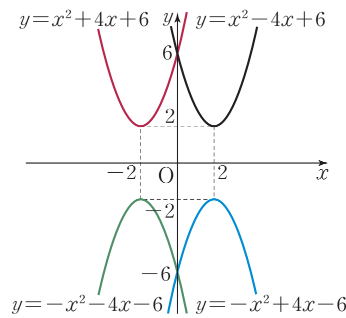
원점에 대하여 대칭이동: $y=2x+1$



(2) x축에 대하여 대칭이동: $y=-x^2+4x-6$

y축에 대하여 대칭이동: $y=x^2+4x+6$

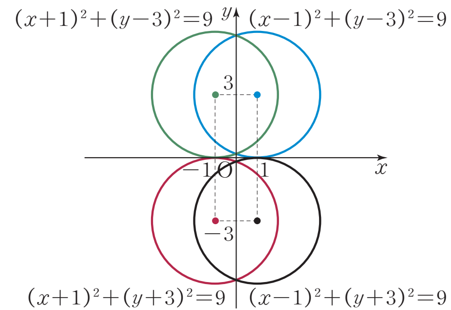
원점에 대하여 대칭이동: $y=-x^2-4x-6$



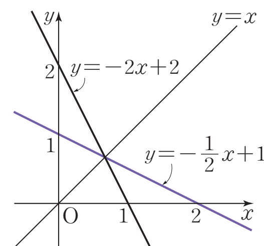
(3) x축에 대하여 대칭이동: $(x-1)^2+(y-3)^2=9$

y축에 대하여 대칭이동: $(x+1)^2+(y+3)^2=9$

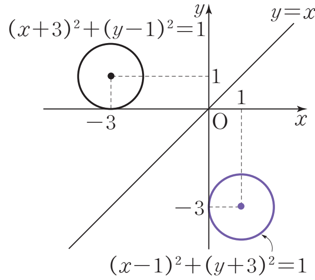
원점에 대하여 대칭이동: $(x+1)^2+(y-3)^2=9$



6 (1) $y=-\dfrac{1}{2}x+1$



(2) $(x-1)^2+(y+3)^2=1$



| 단원 과제 |

점 B를 대칭이동한 점의 좌표는
B′(200, −60)이므로 직선 AB′의 방정식은

$y-120=\dfrac{-60-120}{200-30}(x-30)$, $y-120=-\dfrac{18}{17}(x-30)$

따라서 점 C의 좌표는 $\mathrm{C}\left(\dfrac{430}{3},\ 0\right)$이다.

중단원 기초 [p.187]

1 (1) $(0,\ 1)$ (2) $(1,\ -2)$

2 (1) $y=-x+1$
(2) $y=3x^2+18x+29$
(3) $(x+6)^2+(y-3)^2=1$

3 (1) $(1,\ 2)$ (2) $(-1,\ -2)$
(3) $(-1,\ 2)$ (4) $(-2,\ 1)$

4 (1) $(x+1)^2+(y+3)^2=2$ (2) $(x-1)^2+(y-3)^2=2$
(3) $(x-1)^2+(y+3)^2=2$ (4) $(x-3)^2+(y+1)^2=2$

중단원 기본 [p.188]

1 2

2 (1) $a=-2$, $b=3$ (2) $2x+5y-8=0$

3 $2\sqrt{5}$

4 $a=-4$, $b=\dfrac{1}{2}$

5 $(x+3)^2+(y+1)^2=1$

중단원 실력 [p.189]

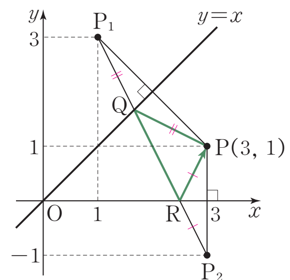
1 $a=1$, $b=2$, $c=3$

2 원 $x^2+y^2=1$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면
$(x-a)^2+(y-b)^2=1$ …… ①
①이 x축에 접하므로 $|b|=1$이고, b는 양수이므로 $b=1$
①이 직선 $y=x$에 접하므로
$\dfrac{|a-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=1$, $|a-1|=\sqrt{2}$
a는 양수이므로 $a=\sqrt{2}+1$
따라서 $a=\sqrt{2}+1$, $b=1$이다.

3 $y=\dfrac{3}{2}x-2$

4 직선 $y=x$에 대하여 대칭인 서로 다른 두 점 A, B의 좌표를 $(a,\ b)$, $(b,\ a)$라고 하자.
두 점 A, B가 곡선 $y=x^2-1$ 위의 점이므로
$b=a^2-1$ …… ①
$a=b^2-1$ …… ②
①−②에서 $b-a=a^2-b^2$
$b-a=(a-b)(a+b)$이고, $a\neq b$이므로 $a+b=-1$
$b=-a-1$ …… ③
③을 ①에 대입하면 $-a-1=a^2-1$, $a^2+a=0$이므로
$a=0$ 또는 $a=-1$
$a=0$일 때 $b=-1$, $a=-1$일 때 $b=0$
따라서 두 점 A, B의 좌표는 $(0,\ -1)$, $(-1,\ 0)$이므로
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\{0-(-1)\}^2+(-1-0)^2}=\sqrt{2}$

5 점 C를 원점, 거울 B를 x축으로 놓으면 점 P의 좌표는 $(3,\ 1)$이고, 거울 A의 방정식은 $y=x$이다.

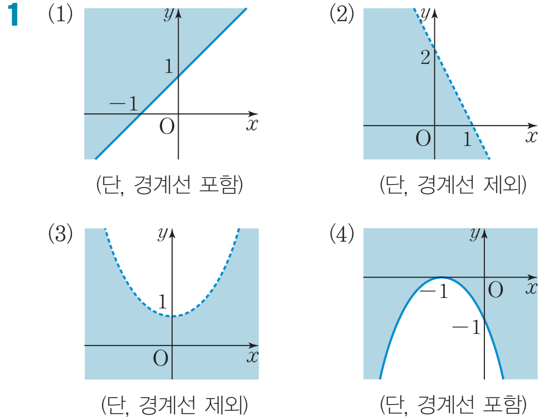


점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 P_1, x축에 대하여 대칭이동한 점을 P_2라고 하면
$P_1(1,\ 3)$, $P_2(3,\ -1)$이고 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{P_1Q}}$, $\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{P_2R}}$이므로
$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QR}}+\overline{\mathrm{RP}}=\overline{\mathrm{P_1Q}}+\overline{\mathrm{QR}}+\overline{\mathrm{RP_2}}=\overline{\mathrm{P_1P_2}}=2\sqrt{5}$
따라서 빛의 경로 P−Q−R−P의 길이는 $2\sqrt{5}$ m이다.

5 부등식의 영역

01 부등식의 영역 [p. 191~197]

1

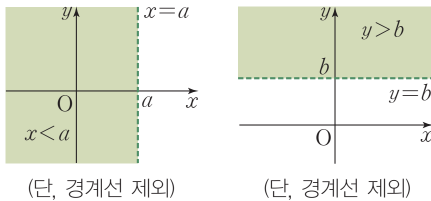


(1) (단, 경계선 포함) (2) (단, 경계선 제외)
(3) (단, 경계선 제외) (4) (단, 경계선 포함)

2 (1) $3x-2y+6>0$ (2) $y\geq x^2-2x-3$

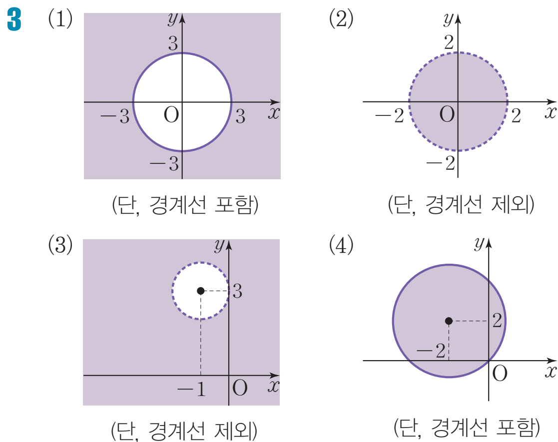
사고력 기르기

다음 그림과 같이 부등식 $x<a$의 영역은 직선 $x=a$의 왼쪽 부분(경계선 제외)이고, 부등식 $y>b$의 영역은 직선 $y=b$의 위쪽 부분(경계선 제외)이다.



(단, 경계선 제외) (단, 경계선 제외)

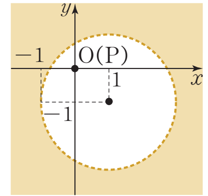
3



(1) (단, 경계선 포함) (2) (단, 경계선 제외)
(3) (단, 경계선 제외) (4) (단, 경계선 포함)

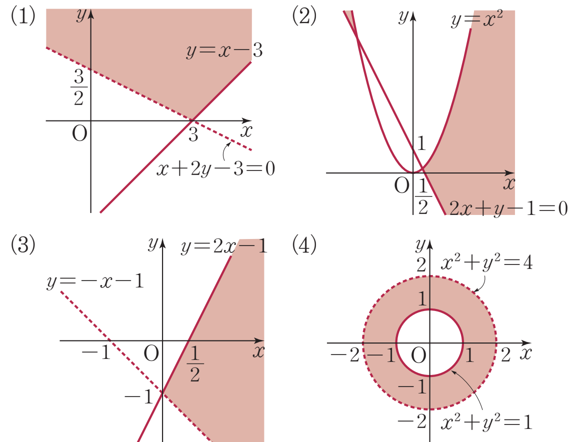
4 (1) $(x-7)^2+(y-4)^2>9$ (2) $(x+1)^2+y^2\leq 4$

사고력 기르기



P(0, 0)을 부등식 $x^2+y^2-2x+2y-2>0$에 대입하면 $-2>0$이므로 부등식을 만족시키지 않는다. 따라서 구하는 부등식의 영역은 오른쪽 그림과 같이 점 P가 있지 않은 영역이다. 이때 경계선은 제외한다.

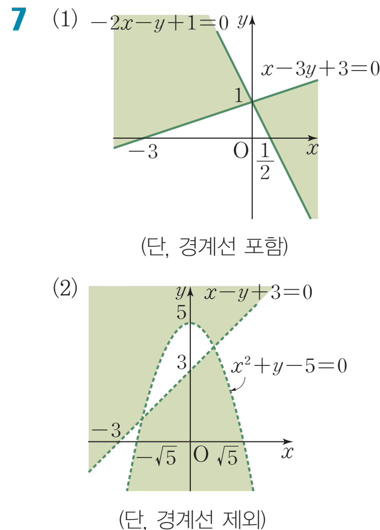
5 실선으로 표시된 경계선은 포함하고, 점선으로 표시된 경계선은 제외한다.



6 (1) $\begin{cases} y>x+2 \\ y<-\frac{4}{3}x+4 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} y\geq 1 \\ y<-\frac{2}{3}x+2 \end{cases}$

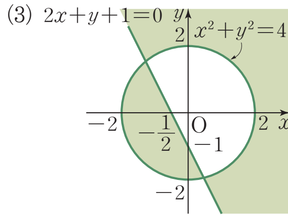
(3) $\begin{cases} y\leq x^2 \\ x^2+y^2\leq 2 \end{cases}$

7



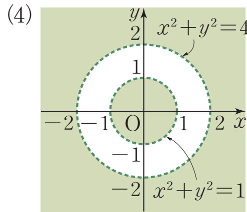
(1) (단, 경계선 포함)
(2) (단, 경계선 제외)

(3)



(단, 경계선 포함)

(4)



(단, 경계선 제외)

8 (1) $(2x-y+5)(2x^2-4x-y+5)<0$

(2) $(x^2+y^2+6x-6y+9)(x^2+y^2-9)\leq 0$

(3) $(3x+y-3)(x^2+y^2-9)\geq 0$

| 단원 과제 |

$$\begin{cases} y>x-18 \\ y>-x-18 \\ x^2+y^2<29^2 \end{cases}$$

02 부등식의 영역에서의 최대, 최소 [p. 198~200]

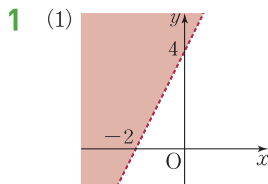
1 (1) 최댓값: 4, 최솟값: -6 (2) 최댓값: 9, 최솟값: -6

2 최댓값: $2\sqrt{10}$, 최솟값: $-2\sqrt{10}$

3 A: 20개, B: 30개, 18만 원

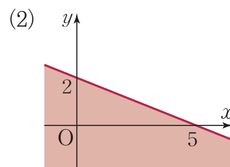
중단원 기초 [p. 201]

1 (1)



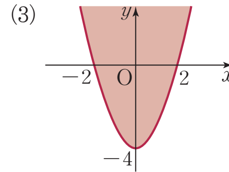
(단, 경계선 제외)

(2)



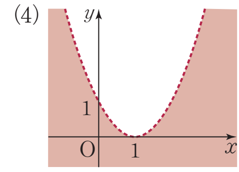
(단, 경계선 포함)

(3)



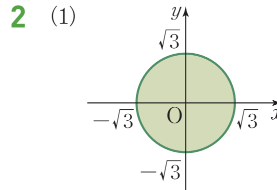
(단, 경계선 포함)

(4)



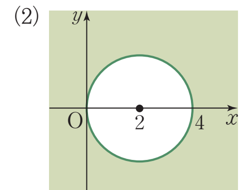
(단, 경계선 제외)

2 (1)



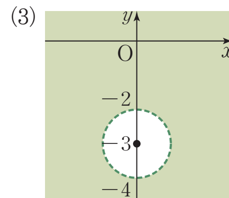
(단, 경계선 포함)

(2)



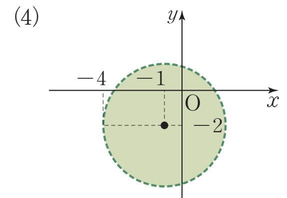
(단, 경계선 포함)

(3)



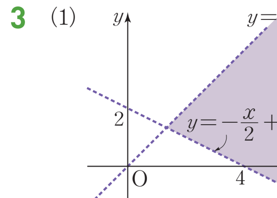
(단, 경계선 제외)

(4)



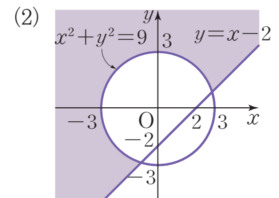
(단, 경계선 제외)

3 (1)



(단, 경계선 제외)

(2)



(단, 경계선 포함)

4 최댓값: 22, 최솟값: 7

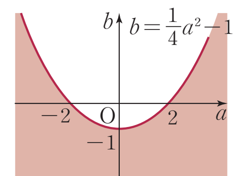
5 최댓값: 4, 최솟값: -8

중단원 기본 [p. 202]

1 이차방정식 $x^2+ax+b+1=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=a^2-4(b+1)\geq 0$

$b\leq \frac{1}{4}a^2-1$

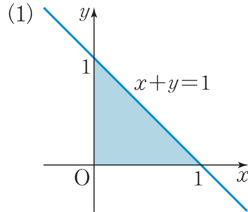


(단, 경계선 포함)

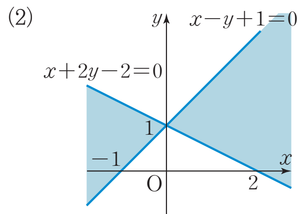
2 $k\le-\sqrt{5}$

3 실선으로 표시된 경계선은 포함하고, 점선으로 표시된 경계선은 제외한다.

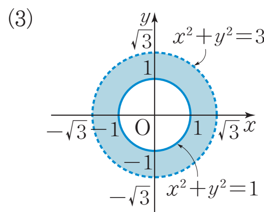
(1)



(2)



(3)



4 (1) $\begin{cases} y\le-x+2 \\ y\ge\frac{1}{2}x-1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} (x+1)^2+(y-1)^2<2 \\ y>-x \end{cases}$

5 최댓값: 1, 최솟값: -3

중단원 실력 [p. 203]

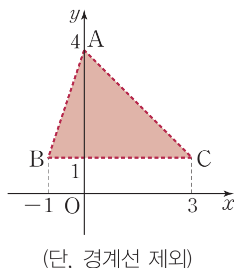
1 삼각형 ABC의 내부의 영역을 연립부등식으로 나타내면

$\begin{cases} y<3x+4 \\ y<-x+4 \\ y>1 \end{cases}$

점 $(2a,\ a)$가 삼각형의 내부에 있으므로

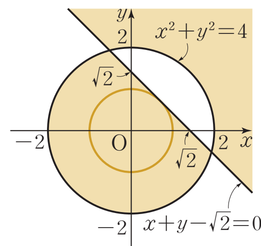
$a<6a+4,\ a<-2a+4,\ a>1$

따라서 $1<a<\frac{4}{3}$이다.



(단, 경계선 제외)

2



(단, 경계선 포함)

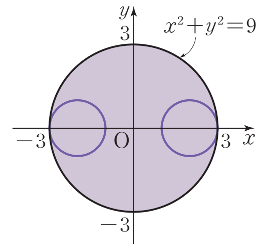
부등식 $(x+y-\sqrt{2})(x^2+y^2-4)\ge0$의 영역은 그림과 같다.

원 $x^2+y^2=r^2$의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $x+y-\sqrt{2}=0$ 사이의 거리는 $\frac{|-\sqrt{2}|}{\sqrt{1+1}}=1$이므로 부등식 $x^2+y^2\le r^2$의 영역이 색칠한 부분에 포함되려면 $0<r\le1$이어야 한다.

따라서 양수 r의 최댓값은 1이다.

3 연립부등식을 만족시키는 영역의 넓이가 최대가 되려면 오른쪽 그림과 같이 부등식 $(x-a)^2+y^2\le1$의 영역이 $x^2+y^2\le9$의 영역에 포함되어야 하므로

$-2\le a\le2$



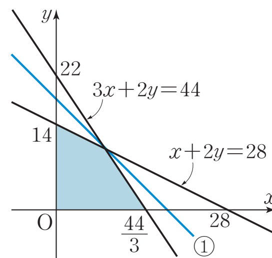
4 (1) $(x+y-1)(x^2-y-1)\le0$

(2) $(x^2+y^2-4)(x^2+y^2-4x)<0$

5 벽돌 A, B를 각각 x개, y개 생산한다고 하면

$x\ge0,\ y\ge0,\ 300x+200y\le4400,\ 200x+400y\le5600$

즉, 연립부등식 $\begin{cases} x\ge0,\ y\ge0 \\ 3x+2y\le44 \\ x+2y\le28 \end{cases}$ 의 영역을 나타내면 다음 그림의 색칠한 부분이다.



이 공장의 이익은 $400x+500y$이므로

$400x+500y=k$ (k는 상수) …… ①

로 놓으면 k가 최대인 경우는 직선 ①이 두 직선 $3x+2y=44$, $x+2y=28$의 교점 $(8,\ 10)$을 지날 때이다. 따라서 벽돌 A는 8개, 벽돌 B는 10개를 생산할 때 이익이 최대가 되며, 이때의 이익은 8200원이다.

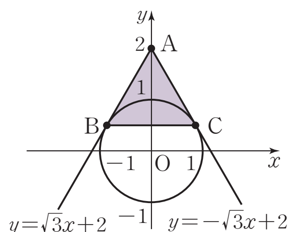
대/단/원 평가 문제 [p. 206~207]

1 ①	**2** ③	**3** ②	**4** ⑤	**5** ⑤
6 ⑤	**7** ②	**8** ④	**9** ①	**10** ③
11 $(-1,\ 1)$		**12** $(2,\ 4)$	**13** 4	**14** 120
15 풀이 참조		**16** 풀이 참조		

6 접점의 좌표를 $(a,\ b)$라 고 하면 접선의 방정식은

$ax+by=1$

이 접선이 점 A$(0,\ 2)$를 지나므로 $2b=1$, $b=\frac{1}{2}$



접점 $(a,\ b)$, 즉 $\left(a,\ \frac{1}{2}\right)$은 원 $x^2+y^2=1$ 위에 있으므로

$a^2+\frac{1}{4}=1$, $a=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 점 B, C의 좌표를

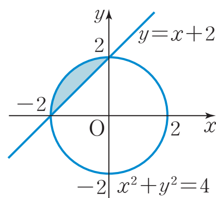
$B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$로 놓을 수 있으므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{3}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

9 주어진 연립부등식의 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분이다. 따라서 구하는 영역의 넓이는

$\pi\times2^2\times\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\times2\times2$

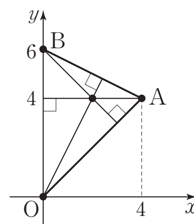
$=\pi-2$



(단, 경계선 포함)

12 점 A에서 직선 OB에 그은 수선의 방정식은 $y=4$

직선 AB의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로 점 O에서 직선 AB에 그은 수선의 방정식은 $y=2x$



두 수선의 교점의 좌표를 구하면 $(2,\ 4)$

점 B에서 선분 OA에 그은 수선의 방정식은 $y=-x+6$이고 이 직선도 점 $(2,\ 4)$를 지나므로 세 수선의 교점의 좌표는 $(2,\ 4)$

15 원 $(x-5)^2+y^2=r^2$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 $(y-5)^2+x^2=r^2$, $x^2+(y-5)^2=r^2$

이 원이 직선 $3x-4y+10=0$에 접하므로

$|r|=\frac{|3\times0-4\times5+10|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{10}{5}=2$

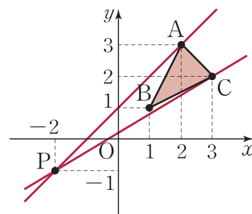
따라서 $r^2=4$이다.

16 $\frac{y+1}{x+2}=k$ (k는 상수)로 놓으면

$y+1=k(x+2)$ …… ①

직선 ①은 k의 값에 관계없이 점 P$(-2,\ -1)$을 지나고, 기울기가 k인 직선이다.

오른쪽 그림에서 직선 ①이 점 A$(2,\ 3)$을 지날 때 k는 최대이고, 점 C$(3,\ 2)$를 지날 때 k는 최소이다.



따라서 $\frac{y+1}{x+2}$의 최댓값은

$\frac{3+1}{2+2}=1$이고, 최솟값은 $\frac{2+1}{3+2}=\frac{3}{5}$이다.

용어

기호

사진 자료 출처

뉴스뱅크 이미지 • • 83쪽, 103쪽, 115쪽
셔터스톡 • • 10쪽, 12쪽, 13쪽, 15쪽, 16쪽, 18쪽, 28쪽, 29쪽, 32쪽, 42쪽, 48쪽, 52쪽, 56쪽, 57쪽, 58쪽, 70쪽, 82쪽, 91쪽, 110쪽, 111쪽, 117쪽, 119쪽, 124쪽, 128쪽, 129쪽, 130쪽, 136쪽, 146쪽, 147쪽, 161쪽, 172쪽, 186쪽, 200쪽, 203쪽, 204쪽, 210쪽
유로크레온 • • 60쪽, 69쪽, 181쪽
이미지클릭 • • 43쪽, 64쪽, 82쪽, 110쪽
토픽이미지 • • 70쪽, 72쪽, 89쪽, 96쪽, 97쪽, 124쪽, 132쪽, 162쪽, 163쪽, 190쪽, 191쪽, 208쪽, 209쪽
기타 • • 에스허르 홈페이지(http://www.mcescher.com) – 177쪽
칸딘스키 홈페이지(http://www.wassilykandinsky.net) – 167쪽
BIOS Ocean Academy(http://biosoceanacademy.blogspot.kr) – 147쪽

인용 자료 출처

12쪽, Carl B. Boyer, Uta C. Merzbach(양영오, 조윤동 역), 수학의 역사(상, 하), 경문사, 2000, pp.493~549
15쪽, David Halliday 외 2인, 일반물리학 제1권, 범한서적, 2006, pp.27
22쪽, 이만근, 동아일보, 이만근 교수의 수학 오디세이1, 21세기북스, 2013, pp.42
28쪽, 이동흔 외 8인, 수학 선생님도 궁금한 101가지 수학 질문 사전, 북멘토, 2012, pp.33
29쪽, 김충섭, 메톤이 들려주는 달력 이야기, 자음과모음, 2005, pp.151~162
52쪽, 원동호, 현대 암호학, 그린, 2004, pp.29~30
56쪽, 이동흔 외 8인, 수학 선생님도 궁금한 101가지 수학 질문 사전, 북멘토, 2012, pp.23~26
60쪽, 김용운, 김용국, 수학사대전, 우성문화사, 1986, pp.25~26
64쪽, 과학동아(http://science.dongascience.com)
70쪽, 이광연, 자연의 수학적 열쇠, 피보나치수열, 웅진씽크빅, 2006, pp.175~178
72쪽, 이성갑, 통조림 식품제조학 및 실험실습서, 유한문화사, 2000, pp.117~118
82쪽, 런던장애인올림픽대회(http://london2012.kosad.or.kr)
83쪽, 한국물리학회(http://www.kps.or.kr)
86쪽, 이종일 외 19인, 바이오의 광학, 전남대학교출판부, 2008, pp.100~202
89쪽, 소원주, 백두산 대폭발의 비밀, 사이언스북스, 2010, pp.24~25
92쪽, David Halliday 외 2인, 일반물리학 제1권, 범한서적, 2006, pp.27
96쪽, 한국영양학회, 2010 한국인 영양섭취기준, 2010, pp.1~7
97쪽, James R. Voelkel(박영준 역), 행성운동과 케플러, 바다, 2006, pp.153~155
101쪽, 차종천 역, 구장산술 주비산경, 범양사, 2000, pp.159~160
110쪽, 더사이언스(http://news.dongascience.com)
111쪽, 유미, 현장적응을 위한 미술치료의 이해, 이담북스, 2010, pp.186
114쪽, 과학동아(http://science.dongascience.com)
124쪽, 두산백과사전 두피디아(http://www.doopedia.co.kr)
128쪽, Howard Eves(이우영, 신항균 역), 수학사, 경문사, 1995, pp.244~251
132쪽, 남정권, 좌표가 뭐죠?, 사람과 산, 5월호, 2007, pp.352~357
133쪽, 브리태니커 백과사전(http://www.britannica.co.kr)
135쪽, 국립해양조사원(http://www.khoa.go.kr)
136쪽, 김성규, 과학이 남긴 이야기, 자우, 2007, pp.9~22
146쪽, 기상청(http://www.kma.go.kr)
147쪽, BIOS Ocean Academy(http://biosoceanacademy.blogspot.kr)
151쪽, 두산백과사전 두피디아(http://www.doopedia.co.kr)
162쪽, 브리태니커 백과사전(http://www.britannica.co.kr)
163쪽, 브리태니커 백과사전(http://www.britannica.co.kr)
167쪽, Wassily Kandinsky, 심문섭, 칸딘스키, 서문당, 1992, pp.29
177쪽, M. C. Escher(김유경 역), M.C. 에셔, 무한의 공간, 다빈치, 2004, pp.34~83
181쪽, 브리태니커 백과사전(http://www.britannica.co.kr)
191쪽, 기상청(http://www.kma.go.kr)
197쪽, 한국야구위원회(http://www.koreabaseball.com)
198쪽, 신준용, 경영학과 경제학을 위한 수학, 학현사, 2003, pp.347
208쪽, 안철환, 24절기와 농부의 달력, 소나무, 2011

집필진

* 신항균 서울교육대학교 총장
이계세 병점고등학교 교사
박상의 장충고등학교 교사
이광연 한서대학교 교수
김정화 서울사대부설고등학교 교사
서원호 청원고등학교 교감
박세원 신경대학교 교수
박문환 인천인제고등학교 교사
전제동 창원중앙고등학교 교사
신범영 청담중학교 교감
윤정호 대구과학고등학교 교사
이동흔 하나고등학교 교사

* 표시는 집필진 책임자임

인천광역시교육청 인정도서심의회 위원

* 박규홍 서원대학교
정옥경 인천신현고등학교
김동수 신명여자고등학교
정미라 제물포고등학교
최중근 인천초은고등학교
이진 세일고등학교
양재원 인천영선고등학교
양혜순 인천부흥고등학교
권태룡 동인천고등학교
김현옥 신송고등학교
민선애 인천공항고등학교
권봉희 인천송천고등학교
서순옥 인천예술고등학교
김윤수 검단고등학교
안유진 인천진산과학고등학교
유영신 인천상정고등학교
배수아 인천산곡고등학교
박제남 인하대학교
오흥준 초당대학교
배재형 경희대학교
김성기 계산고등학교
전경환 인하대학교사범대학 부속고등학교
서동희 인천고잔고등학교
조준호 인명여자고등학교
김미경 연송고등학교
이재성 인천공항고등학교
배혜정 옥련여자고등학교
임병태 영종국제물류고등학교
이종현 작전여자고등학교
강신석 인천과학고등학교
김희경 도림고등학교
윤세정 부광고등학교
류주현 부평여자고등학교
김윤정 인천국제고등학교
김진영 인천진산과학고등학교
장은하 부개여자고등학교
박진상 인천외국어고등학교
박영경 세일고등학교
이재정 인천남동고등학교
조성현 인천원당고등학교
김복수 송도고등학교
정문자 수원대학교
이종성 인하대학교
김병학 경희대학교
김대흥 신송고등학교
허석 부개고등학교
박희성 인천영종고등학교
성미애 부개여자고등학교
전효진 가림고등학교
윤효진 인천고등학교
오경민 학익고등학교
김종오 광성고등학교
이선희 문일여자고등학교
유경민 연수여자고등학교
우연희 서운고등학교
이혜연 백석고등학교
박은희 연수고등학교
조영식 인천부흥고등학교
신은주 인일여자고등학교
김성래 광성고등학교
함유선 인천여자고등학교
박종호 안남고등학교
문정연 연수여자고등학교
임승희 인제고등학교
이대성 부광고등학교
이재원 금오공과대학교
조규근 명지대학교
이재혁 이화여자대학교
김경선 인천가정고등학교
윤기운 인천여자고등학교
한경호 학익여자고등학교
최항철 인천국제고등학교
고명호 인천국제고등학교
차요섭 인천대건고등학교
김현희 인일여자고등학교
신선희 인천청라고등학교
고아라 부평고등학교
박숭열 인천예일고등학교
김성식 부광여자고등학교
최미희 작전고등학교
김기선 인천광성중학교
홍지연 인천신현고등학교
고현숙 학익여자고등학교
문서영 인천청라고등학교
최윤호 연수고등학교
안현태 강화고등학교
김장회 인천예일고등학교
이주영 인천송천고등학교
고석구 건국대학교
류희수 경인교육대학교
오종철 군산대학교
이동환 부산교육대학교
박용회 계산고등학교
고일석 계양고등학교
김혜경 검단고등학교

* 표시는 심의회 위원장임

인천광역시교육청 인정도서 감수 위원

* 강옥기 성균관대학교
김경남 경화여자EnglishBusiness고등학교
김지선 경상대학교
박선민 수원고등학교
유은호 옥포중학교
이수철 창원대학교
이현수 목포대학교
최혜정 삼성현중학교
구나영 안양고등학교
김부미 원광대학교
김혜리 창원남산고등학교
오세권 충남대학교
이경자 한남대학교
이은주 칠성중학교
이현호 울산대학교
황명자 진주남중학교
권순재 청송중학교
김재원 계남중학교
노영순 공주대학교
오주열 창포중학교
이광진 김해가야고등학교
이정길 영산고등학교
조현준 거제옥포고등학교
권향명 석전중학교
김종철 물금동아중학교
박상근 홍천고등학교
유원석 금오공과대학교
이상국 풍양고등학교
이준우 대아고등학교
진성영 진주고등학교

* 표시는 감수 위원 책임자임

만든 사람들

개발 책임 김영호
편집 김경수, 윤준원, 천세규, 최윤정, 김은빛, 이유희
표지 디자인 김의수
본문 디자인 박현신
삽화 김성남
컷 맥컴

인천광역시교육청에서 2013년 8월 30일 인정 승인을 하였음.

고등학교 수학 I

2014. 3. 1. 초판 발행 정가 원
지은이: 신항균 외 11인
발행인: (주)지학사 서울시 마포구 신촌로 6길 5
인쇄인: (주)벽호 경기도 파주시 한빛로 43

이 교과서의 본문 용지는 우수 재활용 제품 인증을 받은 재활용 종이를 사용했습니다.

교과서에 대한 문의사항이나 의견이 있는 분은 한국교과서연구재단이 운영하는 **교과서민원바로처리센터**(전화 1566-8572, 누리집 주소 http://www.textbook114.com 또는 http://www.교과서114.com)에 문의하여 주시기 바랍니다.

이 도서에 게재된 저작물에 대한 보상금은 문화체육관광부 장관이 정하는 기준에 따라 **사단법인 한국복제전송저작권협회**(전화 02-2608-2800, 누리집 주소 www.korra.kr)에서 저작재산권자에게 지급합니다.

내용 관련 문의: (주)지학사 콘텐츠본부 수학팀 전화 02-330-5440 전송 02-325-8009
구입 관련 문의: (주)지학사 영업본부 영업관리팀 전화 02-330-5302 전송 02-325-8010
공급 업무 대행: 사단법인 한국검인정교과서 경기도 파주시 조리읍 당재봉로 29-28
개별 구입 안내: 누리집 주소 www.ktbook.com 전화 02-3663-5409~12 (사)한국검인정교과서

ISBN 978-89-05-04011-6 53410

고|등|학|교 수학 I





ISBN 978-89-05-04011-6